

Факультет компьютерных наук, ПМИ, 2018-19 учебный год
Дифференциальные уравнения
Домашнее задание №А

И. В. Щуров, А. А. Айзенберг, М. И. Ронжина, И. С. Шилин
Фамилия и имя студента: Кузнецов Дмитрий Сергеевич

Правила

Academic ethics policy. Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

Deadline policy. В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться как решение $x = x(t)$ дифференциального уравнения

$$\dot{x} = -x$$

с начальным условием $x(0) = x_0$, где x_0 — оценка без учёта штрафа, t — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

Typography policy. Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо сверстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Картинки могут быть нарисованы на компьютере или вставлены в виде сканов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

Grading policy. Пишите, пожалуйста, полные решения со всеми необходимыми пояснениями. Это дополнительное ДЗ, входящее в накопленную оценку по категории «дополнительные штуки». Максимум за него можно набрать 10 баллов (если сделать все задачи).

Задачи

Задача 1. Пусть $z(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$. Рассмотрим систему $\dot{z} = Az$, где

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Указать все значения параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ (если такие есть), при которых особая точка $(0, 0, 0)$ является

- асимптотически устойчивой;
- устойчивой по Ляпунову.

Если таких значений параметра α нет, объяснить, почему.

Warning: при использовании теоремы об устойчивости по первому приближению, помните о том, что бывают случаи, когда она не даёт никакого однозначного ответа. Тем не менее, вам необходимо исследовать и эти случаи тоже.

Задача 2. Рассмотрим решение системы

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

с начальным условием $x(0) = b, y(0) = c$.

Найти все значения параметров a, b, c, d , при которых решение стремится к точке $(0, 0)$ при $t \rightarrow +\infty$.

Задача 3. Рассмотрим семейство уравнений, зависящее от ϵ :

$$\dot{x} = \epsilon x + 3\epsilon + 8x - (x + 3)^3 + 24$$

- При каких значениях параметра ϵ происходит бифуркация? (Иными словами, при каких значениях ϵ система не является структурно устойчивой?)
- Как зависит устойчивость особой точки $x = -3$ от параметра ϵ ? Указать, при каких значениях параметра особая точка является асимптотически устойчивой, при каких устойчивой по Ляпунову, при каких является неустойчивой. Исследовать все случаи.
- Как зависит число различных фазовых кривых уравнения от параметра ϵ ?

Задача 4. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 12x^2 - 20x - 2y + 2; \\ \dot{y} = -2x + 4 \ln(y + 4) + 2. \end{cases}$$

- Построить эскиз фазового портрета системы вблизи особой точки $(1, -3)$.
- Является ли эта особая точка устойчивой по Ляпунову? Асимптотически устойчивой? Ответ обосновать.

Задача 5. Найти все значения параметра s , при которых у системы

$$\dot{x} = 8x + 4y, \quad \dot{y} = sx + 8y$$

имеется глобально определённый непостоянный непрерывный первый интеграл.

Задача 6. Рассмотрим уравнение гармонического осциллятора с трением:

$$\ddot{x} = -4x - \alpha \dot{x},$$

где $\alpha > 0$ — коэффициент трения (мы считаем, что сила трения пропорциональна скорости). Найти все значения параметра α , при которых осциллятор проходит положение равновесия (точку $x = 0$) бесконечно много раз.

Задача 7. Докажите или опровергните следующие утверждения:

- Если у вещественной системы дифференциальных уравнений на плоскости есть особая точка, устойчивая по Ляпунову, то и у её малого возмущения есть особая точка, устойчивая по Ляпунову.
- Если у вещественной системы дифференциальных уравнений на плоскости есть асимптотически устойчивая особая точка, то у её малого возмущения есть особая точка, устойчивая по Ляпунову.