

Производные некоторых элементарных функций

a и b – константы (числа)

$\log(x) = \ln(x)$ – натуральный логарифм

- $(a)' = 0$
- $(ax + b)' = a$
- $(x^2)' = 2x$
- $(x^a)' = ax^{a-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\log(x))' = \frac{1}{x}$

Пример 1. Найдите производную $f(x) = 4$.

$$(4)' = 0.$$

Пример 2. Найдите производную $f(x) = -7x + 2$.

$$(-7x + 2)' = -7.$$

Пример 3. Найдите производную $f(x) = x^3$.

$$(x^3)' = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2.$$

Правила дифференцирования

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые функции.

- $(af(x))' = af'(x)$
- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$

Пример 4. Найдите производную $f(x) = 6 \log(x)$.

$$(6 \log(x))' = 6 \cdot (\log(x))' = 6 \cdot \frac{1}{x} = \frac{6}{x}.$$

Пример 5. Найдите производную $f(x) = 7x^2 - 3x + 2$.

$$(7x^2 - 3x + 2)' = (7x^2)' - (3x)' + (2)' = 7 \cdot 2x - 3 + 0 = 14x - 3.$$

Пример 6. Найдите производную $f(x) = 3x \cdot e^x$.

$$(3x \cdot e^x)' = (3x)' \cdot e^x + (3x) \cdot (e^x)' = 3e^x + 3x \cdot e^x.$$

Пример 7. Найдите производную $f(x) = \frac{x-2}{x^2+3x+5}$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{x-2}{x^2+3x+5}\right)' &= \frac{(x-2)' \cdot (x^2+3x+5) - (x^2+3x+5)' \cdot (x-2)}{(x^2+3x+5)^2} = \\ &= \frac{1 \cdot (x^2+3x+5) - (2x+3)(x-2)}{(x^2+3x+5)^2} = \frac{(x^2+3x+5) - (2x^2-4x+3x-6)}{(x^2+3x+5)^2} = \frac{-x^2+4x+11}{(x^2+3x+5)^2}. \end{aligned}$$

Производная сложной функции

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Пример 8. Найдите производную $f(x) = e^{2x}$.

Функция $f(x)$ является сложной функцией – в ней заключена еще одна функция $g(x) = 2x$. Как это определить? Можно подумать о том, как мы будем находить значение $f(x)$ в некоторой точке. Возьмем точку $x = 3$. Чтобы найти значение $f(3)$, сначала нужно найти значение $2x = 2 \cdot 3 = 6$, а затем возвести в полученную степень e .

Обозначим $2x$ за $g(x)$. Теперь $f(x) = e^{g(x)}$. С другой стороны, мы знаем, что $g(x) = 2x$. Осталось применить правило дифференцирования сложной функции:

$$(e^{2x})' = e^{2x} \cdot (2x)' = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}.$$

Пример 9. Найдите производную $f(x) = \log(3x^2)$.

Обозначим $3x^2$ за $g(x)$. Теперь $f(x) = \log(g(x))$. С другой стороны, $g(x) = 3x^2$. Осталось применить правило:

$$(\log(3x^2))' = \frac{1}{3x^2} \cdot (3x^2)' = \frac{1}{3x^2} \cdot 3 \cdot 2x = \frac{6x}{3x^2} = \frac{2}{x}.$$

Проверить, насколько вы умеете распознавать сложные функции, можно, например, здесь.