ОП «Политология», 2017-18
Математика и статистика, часть 2
Тренировочные задания по блоку «Теория вероятностей»
Не является типовым вариантом контрольной работы! (3 модуль)
А. А. Макаров, А. А. Тамбовцева

Задача 1. Дан ряд распределения случайной величины X:

X	-1	0	2	6	7
p	0.2	0.5		0.1	0.1

a. Найдите $P(X \leq 2)$, $P(X < 5.5)$, $P(X > 7)$.
b. Найдите $F(1)$, $F(2.5)$, $F(8)$.
c. Найдите математическое ожидание X, то есть $E(X)$.
d. Найдите дисперсию X, то есть $Var(X)$.
e. Найдите стандартное отклонение X, то есть $sd(X)$.

Решение. Пропущенная вероятность: $1 - 0.2 - 0.5 - 0.1 - 0.1 = 0.1$.
a. $P(X \leq 2) = P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 2) = 0.8$,
$P(X < 5.5) = 0.8$,
$P(X > 7) = 0$.
b. $F(1) = P(X \leq 1) = 0.7$, $F(2.5) = 0.8$, $F(8) = 1$.
c. $E(X) = (-1) \cdot 0.2 + 0 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.1 + 6 \cdot 0.1 + 7 \cdot 0.1 = 1.3$.
d. $Var(X) = 1^2 \cdot 0.2 + 0^2 \cdot 0.5 + 2^2 \cdot 0.1 + 6^2 \cdot 0.1 + 7^2 \cdot 0.1 - 1.3^2 = 7.41$.
e. $sd(X) = \sqrt{Var(X)} = 2.722$.

Задача 2. Выборы в некотором сообществе устроены таким образом: каждый участник может голосовать за любое количество кандидатов, в том числе, против всех или за всех сразу. В выборах участвуют 4 кандидата. Про избирателя N известно, что с вероятностью 0.12 он проголосует против всех, с вероятностью 0.25 он проголосует за одного кандидата, с вероятностью 0.36 – за двух, с вероятностью – 0.14 за трех и с вероятностью 0.13 – за четырех.

Про избирателя W известно, что он с вероятностью 0.33 проголосует за одного кандидата, с вероятностью 0.45 за двух кандидатов, с вероятностью 0.08 за трех кандидатов, а также то, что он с равной вероятностью проголосует против всех и за всех кандидатов сразу.

a. Пусть случайная величина X – число кандидатов, за которых проголосует избиратель N. Запишите закон распределения случайной величины X.
b. Пусть Y – число кандидатов, за которых проголосует избиратель W. Постройте ряд распределения случайной величины Y.
c. Мы считаем избирателя «разборчивым», если среднее ожидаемое число кандидатов, за которых он голосует, менее 2. Есть ли среди избирателей N и W «разборчивый» избиратель? Если да, то кто из них «более разборчивый»?

X	0	1	2	3	4
p	0.12	0.25	0.36	0.14	0.13

Y	0	1	2	3	4
p	0.07	0.33	0.45	0.08	0.07

Решение. $E(X) = 1.91$, а $E(Y) = 1.75$. Оба разборчивые, второй более разборчивый, чем первый, так как $E(Y) < E(X)$.

Задача 3. Известно, что случайные величины X и Y независимы, и при этом $E(X) = 4$, $Var(X) = 9$, $E(Y) = -2$, $Var(Y) = 16$. Найдите математическое ожидание и дисперсию следующих величин:

a. $W_1 = 2X$
b. $W_2 = 2X - 3$
c. $W_3 = 4X + 5Y$
d. $W_4 = 3X - 7Y + 6$

Решение.

a. $E(W_1) = 2 \cdot E(X) = 2 \cdot 4 = 8$,
$Var(W_1) = 2^2 \cdot Var(X) = 4 \cdot 9 = 36$
b. $E(W_2) = E(2X - 3) = 2 \cdot E(X) - 3 = 2 \cdot 4 - 3 = 5$,
$Var(W_2) = Var(2X - 3) = 2^2 \cdot Var(X) = 4 \cdot 9 = 36$
c. $E(W_3) = E(4X + 5Y) = 4 \cdot E(X) + 5 \cdot E(Y) = 4 \cdot 4 + 5 \cdot (-2) = 6$,
$Var(W_3) = Var(4X + 5Y) = 4^2 \cdot Var(X) + 5^2 \cdot Var(Y) = 16 \cdot 9 + 25 \cdot 16 = 544$
d. $E(W_4) = E(3X - 7Y + 6) = 3 \cdot E(X) - 7 \cdot E(Y) + 6 = 32$,
$Var(W_4) = Var(3X - 7Y + 6) = 3^2 \cdot Var(X) + 7^2 \cdot Var(Y) = 865$

Задача 4. Известно, что в компаниях A и B работают 3 категории сотрудников: высшая категория, средняя категория и низшая категория. Для каждой категории сотрудников зафиксирован размер заработной платы, но он может несильно меняться в зависимости от текущей ситуации в компании. Заработная плата сотрудников компании A описывается следующим образом:

– сотрудники высшей категории (их 30%) получают 80 тыс. руб.
– сотрудники средней категории (их 30%) 40 тыс. руб.
– сотрудники низшей категории (их 40%) 20 тыс. руб.

Заработная плата сотрудников компании B описывается следующим образом:

– сотрудники высшей категории (их 60%) получают 100 тыс. руб.
– сотрудники средней категории (их 10%) 80 тыс. руб.
– сотрудники низшей категории (их 30%) 10 тыс. руб.

В какой компании средняя (ожидаемая) заработная плата выше? В какой компании заработная плата распределена более однородно? Подтвердите ответ, используя две меры изменчивости: дисперсию и стандартное отклонение.

A	80	40	20
p	0.3	0.3	0.4

B	100	80	10
p	0.6	0.1	0.3

Решение. $E(A) = 44$ и $E(B) = 71$. $Var(A) = 624$, а $Var(B) = 1629$. $sd(A) = 24.98$, а $sd(B) = 40.36$. Средняя ожидаемая зарплата выше в компании B. Более однородно зарплата распределена в компании A, так как $Var(A) < Var(B)$ и $sd(A) < sd(B)$.

Задача 5. В некотором сообществе обсуждается принятие нового этического кодекса. Проводится голосование: каждый из членов сообщества независимо голосует за принятие или против. Сообщество довольно однородно – каждый из 12 участников с вероятностью 0.5 проголосует за принятие нового этического кодекса. С какой вероятностью будет принят новый этический кодекс, если для его принятия необходимо не менее 2/3 голосов «за»?

Решение. Не менее 2/3 голосов «за» – не менее $2/3 \cdot 12 = 8$ голосов. $p = 0.5$, $q = 1 - 0.5 = 0.5$

$$P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) + P(X = 11) + P(X = 12) =$$
$$= C_{12}^{8} \cdot 0.5^8 \cdot 0.5^4 + C_{12}^{9} \cdot 0.5^9 \cdot 0.5^3 + C_{12}^{10} \cdot 0.5^{10} \cdot 0.5^2 + C_{12}^{11} \cdot 0.5^{11} \cdot 0.5^1 + C_{12}^{12} \cdot 0.5^{12} \cdot 0.5^0 =$$
$$0.121 + 0.0537 + 0.0161 + 0.002 + 0 \approx 0.193$$

Задача 6.

a. W – бинарная случайная величина с параметром $p = 2/3$. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины W.

b. U – биномиальная случайная величина с параметрами $p = 4/5$, $n = 7$. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины U.

Решение.

a. $E(W) = 2/3$, $Var(W) = 2/3 \cdot 1/3 = 2/9$.

b. $E(U) = 7 \cdot 4/5 = 28/5$, $Var(U) = 7 \cdot 4/5 \cdot 1/5 = 28/25$.

Задача 7. Посиделки студентов-политологов редко обходятся без горячих политических дебатов. Известно, что в 30 случаях из 40 спокойные посиделки политологов перерастают в бурные дискуссии на политическую тематику, причем известно, что это соотношение не изменяется от посиделок к посиделкам, и наличие дискуссий на одних посиделках никак не влияет на наличие дискуссий на других. Определите, с какой вероятностью из 10 посиделок:

a. более 8 закончатся политическими дебатами

b. менее 3 закончатся политическими дебатами

c. не менее 2 закончатся политическими дебатами

Решение. Параметры: $p = 30/40 = 0.75$, $q = 0.25$.

a. $P(X > 8) = P(X = 9)+P(X = 10) = C_{10}^{9} \cdot 0.75^9 \cdot 0.25^1 + C_{10}^{10} \cdot 0.75^{10} \cdot 0.25^0 = 0.188+0.056 \approx 0.24$

b. $P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \approx 0.0004$

c. $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \approx 1$

В скольких случаях, в среднем, посиделки политологов перерастают в дискуссии на политическую тематику?

$E(X) = 10 \cdot 0.75 = 7.5$

Задача 8. Закон совместного распределения дискретных величин X и Y задан следующей таблицей:

$X \backslash Y$	-2	0	3
-2	0.1	0.2	0.05
3	0.05	0.3	

a. Запишите маргинальные распределения случайных величин X и Y.

b. Проверьте, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

c. Найдите $Cov(X, Y)$ и $Corr(X, Y)$. Проинтерпретируйте полученные результаты.

X	-2	3
p	0.35	0.55

Y	-2	0	3
p	0.15	0.5	0.35

Решение. $P(X = -2, Y = -2) = 0.1$

$P(X = -2) \cdot P(Y = -2) = 0.35 \cdot 0.15$

$0.1 \neq 0.35 \cdot 0.15 \Rightarrow$ не независимы (зависимы)

$X \cdot Y$	-6	0	4	9
p	0.1	0.5	0.1	0.3

$Cov(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = -6 \cdot 0.1 + 0 \cdot 0.5 + 4 \cdot 0.1 + 9 \cdot 0.3 - 1.25 \cdot 0.75 = 1.56$

$Corr(X, Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(Y)}} = \frac{1.56}{\sqrt{5.69} \cdot \sqrt{3.19}} = 0.37$

Связь прямая, средней силы.

Задача 9. Закон совместного распределения дискретных величин X и Y задан следующей таблицей:

$X \backslash Y$	1	3	4
9	0.03	0.15	0.12
10	0.07	0.35	0.28

Проверьте, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

Решение. Да, являются (нужно проверить все 6 пар значений, для каждой пары будет выполняться условие).

Задача 10. Случайная величина X задается следующим рядом распределения (с пропущенной вероятностью):

X	-1	0	2	6
p	0.2	0.5		0.1

Случайная величина Y задается следующим рядом распределения (с пропущенной вероятностью):

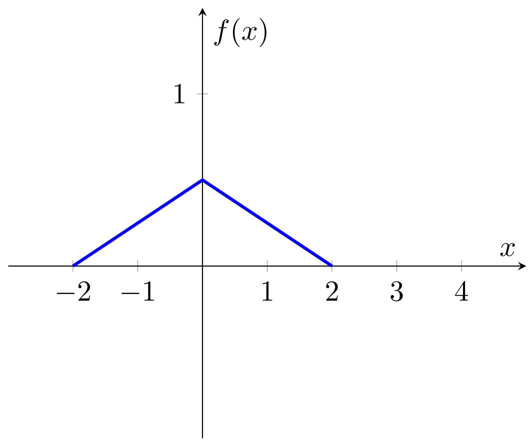
Y	0	3
p	0.4	

Известно, что случайные величины X и Y независимы. Постройте таблицу совместного распределения X и Y.

Решение.

X/Y	0	3
-1	0.08	0.12
0	0.2	0.3
2	0.08	0.12
6	0.04	0.06

Задача 11. Известно, что график функции плотности вероятности случайной величины X выглядит следующим образом:



a. Найдите $f(0)$, $f(-1)$.
b. Найдите $P(-1 < X < 0.5)$.
c. Найдите $F(1.5)$, где F – функция распределения.

Решение.
1. Так как $f(x)$ – функция плотности, площадь под графиком равна 1. Площадь под графиком в нашем случае – то же, что площадь треугольника на $[-2; 2]$. Этот треугольник состоит из двух

одинаковых маленьких прямоугольных треугольников. Так как они одинаковы, площадь каждого равна $\frac{1}{2}$.

$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot b = \frac{1}{2}$, откуда $b = \frac{1}{2}$. b – это второй катет треугольника.

2. Теперь запишем уравнения прямых на участках $[-2; 0]$ и $[0; 2]$.

На участке $[-2; 0]$. Уравнение прямой: $y = kx + b$, где b – значение y, в котором прямая пересекает ось Oy, а $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. В нашем случае $b = 1/2$, а $k = \frac{1/2}{2} = 1/4$. Получаем $y = 1/4x + 1/2$.

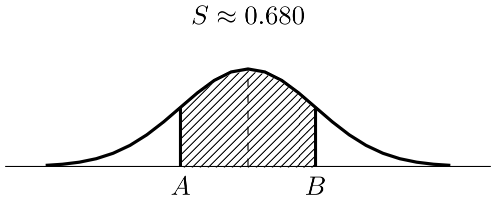
На участке $[0; 2]$. $b = 1/2$, а $k = \frac{-1/2}{2} = -1/4$. Получаем $y = -1/4x + 1/2$.

a. $f(0) = 1/2$, $f(-1) = 1/4 \cdot (-1) + 1/2 = 1/4$.
b. $P(-1 < X < 0.5) = S_{[-1,0.5]} = S_{[-1,0]} + S_{[0,0.5]} = 3/8 + 7/32 = 19/32$.
c. $F(1.5) = S_{[-\infty,1.5]} = S_{[-2,1.5]} = 1 - S_{[1.5,2]} = 1 - 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/8 = 1 - 1/32 = 31/32$.

Задача 12. Известно, что доля сторонников партии «Бобры и демократия» (выраженная в процентах) имеет нормальное распределение со средним значением 12 процентов и стандартным отклонением 4 процента.

a. Найдите вероятность того, что процент сторонников этой партии в некотором случайно выбранном районе будет менее 20%.
b. Найдите вероятность того, что процент сторонников этой партии в некотором случайно выбранном районе будет лежать в интервале от 10% до 25%.
c. Найдите вероятность того, что процент сторонников этой партии в некотором случайно выбранном районе будет более 40%.

Ниже приведен график плотности распределения доли сторонников партии «Бобры и демократия» (в процентах). S – площадь заштрихованной области. Найдите значения A и B.



Решение. $X \sim N(a = 12, \sigma = 4)$

a. $P(X < 20) = P(Z < \dfrac{20-12}{4}) = \Phi(2) = 0.9772$.
b. $P(10 < X < 25) = P(\dfrac{10-12}{4} < Z < \dfrac{25-12}{4}) = \Phi(3.25) - \Phi(-0.5) = \Phi(3.25) - (1 - \Phi(0.5)) = 0.9994 - (1 - 0.6915) = 0.6909$
c. $P(X > 40) = P(Z > \dfrac{40-12}{4}) = 1 - P(Z < 40) = 1 - \Phi(7) = 1 - 1 = 0$.

Задача 13. Случайная величина Z имеет стандартное нормальное распределение.

a. Найдите $P(Z < 1.34)$.
b. Найдите $P(1.2 < Z < 2.32)$.
c. Найдите $P(Z > 2.56)$.
d. Найдите $P(-1 < Z < 0.37)$.
e. Найдите квантиль уровня 0.591.

Решение. Случайная величина Z имеет стандартное нормальное распределение.

a. $P(Z < 1.34) = \Phi(1.34) = 0.9099$.
b. $P(1.2 < Z < 2.32) = \Phi(2.32) - \Phi(1.2) = 0.9898 - 0.8849 = 0.1049$.

c. $P(Z > 2.56) = 1 - \Phi(2.56) = 1 - 0.9948 = 0.0052$.
d. $P(-1 < Z < 0.37) = \Phi(0.37) - \Phi(-1) = \Phi(0.37) - (1 - \Phi(-1)) = 0.6443 - (1 - 0.8413) = 0.4856$.
e. Квантиль уровня 0.591.

$$P(Z < z_{0.591}) = 0.591$$
$$\Phi(z_{0.591}) = 0.591$$
$$z_{0.591} = 0.23$$

Задача 14. Случайная величина X имеет нормальное распределение со следующими параметрами: $X \sim N(-2, \sigma^2 = 4)$.

a. Квантиль уровня 0.9564.
b. Найдите квантиль уровня 0.8.
c. Найдите квантиль уровня 0.64.
d. Найдите квантиль уровня 0.0708.
e. Найдите квантиль уровня 0.35.

Решение. $X \sim N(a = -2, \sigma^2 = 4) \Rightarrow \sigma = 2$

a. Квантиль уровня 0.9564.

$$P(X < x_{0.9564}) = 0.9564$$
$$P(Z < \frac{x_{0.9564} - (-2)}{2}) = 0.9564$$
$$\Phi(\frac{x_{0.9564} - (-2)}{2}) = 0.9564$$
$$\frac{x_{0.9564} - (-2)}{2} = 1.71$$
$$x_{0.9564} = 1.71 \cdot 2 - 2 = 1.42$$

b. Найдите квантиль уровня 0.8.

$$P(X < x_{0.8}) = 0.8$$
$$P(Z < \frac{x_{0.8} - (-2)}{2}) = 0.8$$
$$\Phi(\frac{x_{0.8} - (-2)}{2}) = 0.8$$
$$\frac{x_{0.8} - (-2)}{2} = 0.84$$
$$x_{0.9564} = 0.84 \cdot 2 - 2 = -0.32$$

c. Найдите квантиль уровня 0.64.

$$P(X < x_{0.64}) = 0.64$$
$$P(Z < \frac{x_{0.64} - (-2)}{2}) = 0.64$$
$$\Phi(\frac{x_{0.64} - (-2)}{2}) = 0.64$$
$$\frac{x_{0.64} - (-2)}{2} = 0.36$$
$$x_{0.64} = 0.36 \cdot 2 - 2 = -1.28$$

d. Найдите квантиль уровня 0.0708.

$$P(X < x_{0.0708}) = 0.0708$$
$$P(Z < \frac{x_{0.0708} - (-2)}{2}) = 0.0708$$
$$\Phi(\frac{x_{0.0708} - (-2)}{2}) = 0.0708$$
$$z_{0.0708} = -z_{1-0.0708} = -z_{0.9292} = -1.47$$
$$\frac{x_{0.0708} - (-2)}{2} = -1.47$$
$$x_{0.0708} = -1.47 \cdot 2 - 2 = -4.94$$

e. Найдите квантиль уровня 0.35.

$$P(X < x_{0.35}) = 0.35$$
$$P(Z < \frac{x_{0.35} - (-2)}{2}) = 0.35$$
$$\Phi(\frac{x_{0.35} - (-2)}{2}) = 0.35$$
$$z_{0.35} = -z_{1-0.35} = -z_{0.65} = -0.39$$
$$\frac{x_{0.35} - (-2)}{2} = -0.39$$
$$x_{0.35} = -0.39 \cdot 2 - 2 = -2.78$$

Задача 15. Случайная величина X имеет нормальное распределение со средним -4 и дисперсией 81. Случайная величина Y имеет нормальное распределение со средним -4 и стандартным отклонением 5. Случайная величина W задана следующим образом: $W = 2X + 5Y - 6$. Какое распределение имеет случайная величина W? Почему? Запишите параметры распределения случайной величины W (математическое ожидание и дисперсию).

Решение. Нормальное распределение, так как сумма двух нормальных случайных величин является нормальной величиной. Параметры:

$$E(W) = E(2X + 5Y - 6) = 2 \cdot (-4) + 5 \cdot (-4) - 6 = -34$$
$$Var(W) = Var(2X + 5Y - 6) = 4 \cdot 81 + 25 \cdot 25 = 949$$

$$W \sim N(a = -34, \sigma^2 = 949)$$