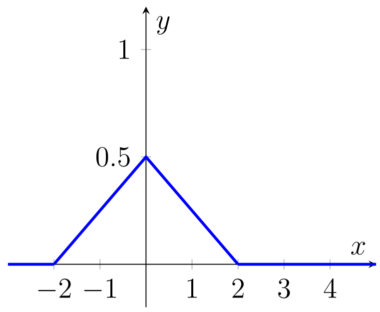
ОП «Политология», 2017-18
Математика и статистика, часть 2
Непрерывные случайные величины. Решения. (28.02.2018 или 02.03.2018)
А. А. Макаров, А. А. Тамбовцева

Задача 1. Известно, что график функции $h(x)$ выглядит следующим образом:



a. Может ли функция $h(x)$ быть функцией распределения?

Решение. Проверим, обладает ли функция $h(x)$ свойствами функции распределения. Во-первых, известно, что значения функции распределения лежат в интервале от 0 до 1 (так как функция распределения определяется через вероятность). По графику видно, что это свойство выполняется: $h(x) \in [0, 0.5]$. Во-вторых, известно, что функция распределения – неубывающая функция. А функция $h(x)$ убывает на участке [0,2]. Следовательно, функция $h(x)$ *не может* быть функцией распределения.

b. Может ли функция $h(x)$ быть функцией плотности вероятности?

Решение. Проверим, обладает ли функция $h(x)$ свойствами функции плотности вероятностей. Во-первых, известно, что значения функции плотности всегда неотрицательны. По графику видно, что это свойство выполняется, так как $h(x) \in [0, 0.5]$. Во-вторых, известно, что площадь под графиком функции плотности вероятностей равна 1. Проверим, чему равна площадь под графиком функции $h(x)$. Посчитать площадь треугольника мы можем двумя способами.

Первый способ:

$$S = \frac{1}{2}ah,$$

где a – основание треугольника, а h – его высота. В нашем случае $a = 4$ (отрезок от -2 до 2) и $h = 0.5$. Поэтому $S = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 0.5 = 1$.

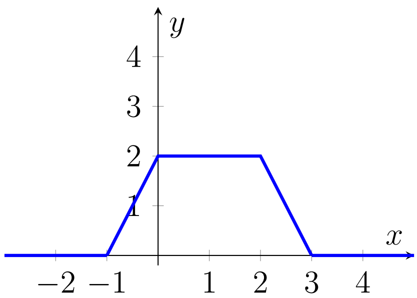
Второй способ: разобьем треугольник на два одинаковых прямоугольных треугольника. Для прямоугольных треугольников:

$$S = \frac{1}{2}ab,$$

где a и b – катеты треугольника.
В нашем случае катеты треугольников равны 2 и 0.5, поэтому площадь каждого из двух треугольников равна $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0.5 = 0.5$.
Треугольников два, поэтому общая площадь равна $0.5 \cdot 2 = 1$.

Оба свойства функции плотности выполняются: значения функции $h(x)$ неотрицательны, и площадь под графиком равна 1. Следовательно, функция $h(x)$ *может* быть функцией плотности вероятности.

Задача 2. Известно, что график функции $G(x)$ выглядит следующим образом:



a. Может ли функция $G(x)$ быть функцией распределения?

Решение. Проверим, обладает ли функция $G(x)$ свойствами функции распределения. Известно, что значения функции распределения лежат в интервале от 0 до 1. По графику видно, что это свойство не выполняется: $G(x) \in [0, 2]$. Этого достаточно, чтобы понять, что функция $G(x)$ *не может* быть функцией распределения. Но можем проверить, выполняется ли второе свойство – неубывание. Функция $G(x)$ убывает на участке $[2, 3]$ – это свойство тоже не выполняется.

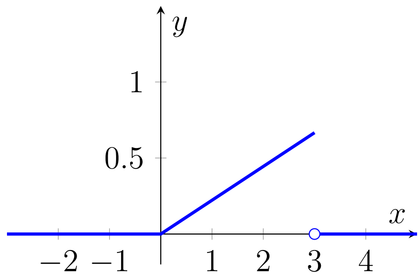
b. Может ли функция $G(x)$ быть функцией плотности вероятности?

Решение. Проверим, обладает ли функция $G(x)$ свойствами функции плотности вероятностей. Во-первых, известно, что значения функции плотности всегда неотрицательны. По графику видно, что это свойство выполняется: $G(x) \in [0, 2]$. Во-вторых, известно, что площадь под графиком функции плотности вероятности равна 1. Проверим, чему равна площадь под графиком функции $G(x)$. Посчитаем площадь трапеции. Для трапеции:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h,$$

где a и b – верхнее и нижнее основания трапеции, а h – ее высота.
В нашем случае $a = 2$, $b = 4$ и $h = 2$. Поэтому $S = \dfrac{2+4}{2} \cdot 2 = 6$ (можно было считать по-другому – разбить трапецию на два прямоугольных треугольника и квадрат, посчитать их площади и сложить). Площадь под графиком не равна 1. Это свойство функции плотности тоже не выполняется.

Задача 3. Функция $f(x)$ – функция плотности вероятности. Ее график выглядит следующим образом:

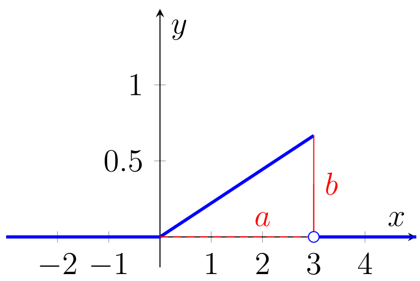


a. Найдите $f(-1)$, $f(0)$, $f(3)$.

Решение. С $f(-1)$ и $f(0)$ все понятно – смотрим на график на картинке и видим, что $f(-1) = f(0) = 0$. Насчет $f(3)$ надо подумать.

Из условия задачи известно, что $f(x)$ – функция плотности вероятности. Из свойств функции плотности следует, что площадь под графиком функции плотности равна 1. Полная площадь под графиком складывается из площадей под графиком на разных участках области определения функции плотности вероятности. Мы видим по графику, что на участках при $x < 0$ и при $x > 3$ функция $f(x) = 0$. Следовательно, площадь под графиком $f(x)$ на этих участках тоже равна 0. Эти участки нас не интересуют.

Остается участок при $0 < x < 3$. График $f(x)$ образует с осью Ox угол, и на этом участке мы можем достроить график до треугольника.



Получаем прямоугольный треугольник. Его площадь равна 1 (следует из свойств функции плотности). Из геометрии нам известно, что площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов:

$$S = \frac{1}{2}ab$$

По графику видно, что $a = 3$. Воспользовавшись формулой площади, получаем:

$$1 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot b$$

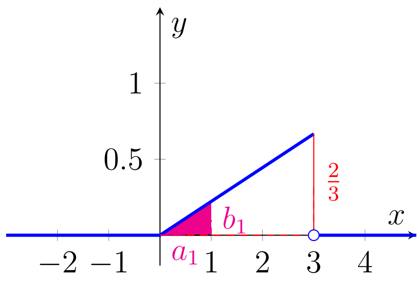
Отсюда $b = \frac{2}{3}$. А ведь b – это и есть значение функции плотности в точке 3. Получаем $f(3) = \frac{2}{3}$.

b. Найдите $P(X = 0)$, $P(X = 2.552)$.

Решение. Раз для случайной величины X определена функция плотности вероятности, можем точно сказать, что X – непрерывная случайная величина. А про непрерывные случайные величины мы знаем, что вероятность в точке $P(X = x_0) = 0$. Причем в любой точке. Поэтому $P(X = 0) = P(X = 2.552) = 0$.

c. Найдите $F(1)$, $F(2)$, где F – функция распределения.

Решение. Найдем сначала $F(1)$.
По определению $F(1) = P(X \leq 1) = P(X < 1)$. А $P(X < 1)$ – это площадь под графиком $f(x)$ на участке от $-\infty$ до 1. В нашем случае это площадь маленького прямоугольного треугольника на участке $[0, 1]$ (выделен фиолетовым цветом).



Один из катетов нам известен, $a_1 = 1$ (отрезок от 0 до 1). Длину второго катета b_1 нужно найти. Тут есть два способа. Первый – через общий вид функции $f(x)$, второй – через подобие треугольников.

Первый способ. По графику видно, что функция $f(x)$ линейна. Поэтому можем записать уравнение прямой $f(x) = kx + b$, где b – это значение y, при котором прямая пересекает ось Oy, а k – коэффициент наклона, показывающий, насколько увеличивается y при увеличении x на 1. Видно, что $b = 0$, так как прямая проходит через точку $(0, 0)$. Найдем k. Для этого поделим прирост y на прирост x (то есть катет b на катет a из предыдущего пункта):

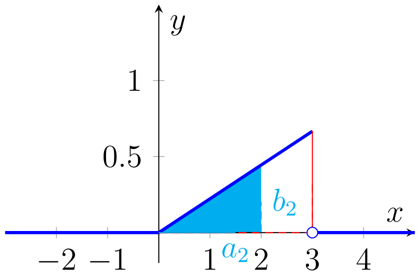
$$2/3 : 3 = \frac{2}{9}$$

Получили уравнение прямой, то есть $f(x) = \frac{2}{9}x$. Теперь, зная, как выглядит функция, можем определить значение функции в точке 1 – это b_1, второй катет нашего фиолетового треугольника. Получаем $b_1 = f(1) = \frac{2}{9} \cdot 1 = \frac{2}{9}$.

Теперь у нас есть все, чтобы найти площадь нужного нам треугольника.

$$F(1) = P(X < 1) = S_{[0,1]} = \frac{1}{2}a_1 b_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{9}.$$

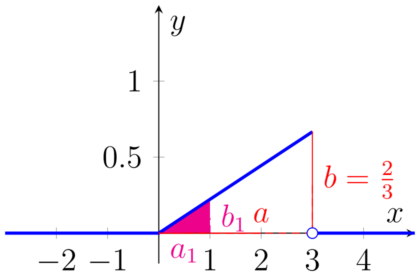
Аналогичным образом найдем $F(2)$. $F(2) = P(X < 2)$, то есть площадь треугольника на участке $[0, 2]$ (выделен голубым цветом).



Катет a_2 равен 2 (отрезок от 0 до 2). Катет b_2 равен $f(2) = \frac{2}{9} \cdot 2 = \frac{4}{9}$. Посчитаем площадь голубого треугольника.

$$F(2) = P(X < 2) = S_{[0,2]} = \frac{1}{2}a_2 b_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{9}.$$

Второй способ. Воспользуемся подобием треугольников. В данном случае у нас есть два треугольника: большой (с площадью S равной 1) и маленький фиолетовый (с неизвестной площадью S_1).



Эти два треугольника подобны (по двум углам). Следовательно, соотношение их сторон, которые лежат напротив равных углов, одинаково:

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b}$$

Но у подобных треугольников есть еще полезное свойство:

$$\frac{S_1}{S} = (\frac{a_1}{a})^2 = (\frac{b_1}{b})^2$$

Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия, квадрату отношения сторон.

Здесь стороны треугольников, которые лежат на оси Ox, нам известны из графика ($a = 3$ и $a_1 = 1$). Площадь большого треугольника мы знаем. Можем решить такое уравнение (где S_1 – площадь фиолетового треугольника):

$$\frac{S_1}{S} = (\frac{1}{3})^2$$

$$\frac{S_1}{1} = (\frac{1}{3})^2$$

$$S_1 = \frac{1}{9}$$

Следовательно, $F(1) = S_1 = \frac{1}{9}$.

Аналогичным образом найдем $F(2)$.

$$\frac{S_2}{S} = (\frac{2}{3})^2$$

$$\frac{S_2}{1} = (\frac{2}{3})^2$$

$$S_2 = \frac{4}{9}$$

Поэтому $F(2) = S_2 = \frac{4}{9}$

d. Найдите $P(0 < X < 1)$.

Решение. Нам известно, что $P(a < X < b)$ – это площадь под графиком функции плотности на участке от a до b. В нашем случае это площадь под графиком функции плотности на участке от 0 до 1. То есть то же самое, что $F(1)$. $F(1) = \frac{1}{9}$ (из предыдущего пункта).

e. (*) Найдите $E(X)$, $Var(X)$.

Решение. По определению математическое ожидание для непрерывных случайных величин:

$$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

Если мы посмотрим на график в задаче, мы поймем, что интегрировать что-то на бесконечности нам не придется – раз на участках $x < 0$ и $x > 3$ функция $f(x) = 0$, то и написанный выше определенный интеграл при таких x будет равен нулю. Опять нас интересует участок $0 < x < 3$. Получаем:

$$E(X) = \int\limits_{0}^{3} x \cdot f(x)dx$$

Чтобы посчитать подынтегральное выражение, нам нужно знать $f(x)$ явно, то есть записать уравнение прямой. При решении пункта c (первым способом) мы уже нашли, что $f(x) = \frac{2}{9}x$. Можем возвращаться к математическому ожиданию.

$$E(X) = \int\limits_{0}^{3} x \cdot f(x)dx = \int\limits_{0}^{3} (x \cdot \frac{2}{9}x)dx = \frac{2}{9}\int\limits_{0}^{3} (x^2)dx = \frac{2}{9} \cdot \frac{x^3}{3}|_0^3 = \frac{2}{9}(\frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3}) = 2$$

Про дисперсию непрерывных случайных величин нам известно следующее:

$$Var(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx - [\int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx]^2$$

Исходя из заданной функции плотности получаем:

$$Var(X) = \int\limits_{0}^{3} x^2 \cdot f(x)dx - [\int\limits_{0}^{3} x \cdot f(x)dx]^2$$

$$\int\limits_{0}^{3} x^2 \cdot f(x)dx = \int\limits_{0}^{3} x^2(\frac{2}{9}x)dx = \frac{2}{9}\int\limits_{0}^{3} x^3dx = \frac{2}{9} \cdot \frac{x^4}{4}|_0^3 = \frac{2}{9} \cdot \frac{81}{4} = \frac{9}{2} = 4.5$$

$$[\int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx]^2 = 4 \text{ – просто } E(X) \text{ в квадрате}$$

Итого:

$$Var(X) = 4.5 - 4 = 0.5$$