ОП «Политология», 2017-18
Математика и статистика, часть 2
Нахождение квантилей нормального распределения.
А. А. Макаров, А. А. Тамбовцева

Пример 1. Случайная величина Z имеет стандартное нормальное распределение. Найти квантиль уровня $q = 0.8686$.

По определению квантиль уровня q – такое x_q, что $P(X \leq x_q) = q$, то есть такое значение случайной величины X, которое значения X не превышают с заданной вероятностью q. Воспользуемся определением и запишем, что нам известно.

$$P(Z \leq z_{0.8686}) = 0.8686$$
$$\Phi(z_{0.8686}) = 0.8686$$

Находим в таблице стандартного нормального распределения значение функции распределения, равное 0.8686 (то есть выполняем обратную операцию, если сравнивать с нахождением вероятностей по таблице), и «восстанавливаем» по нему значение z. Получаем значение 1.12.

$$z_{0.8686} = 1.12$$

Квантиль уровня 0.0886 равен 1.12.

Пример 2. Случайная величина X имеет нормальное распределение со средним значением 2 и дисперсией 9. Найти квантиль уровня $q = 0.8686$.

$$X \sim N(a = 2, \sigma^2 = 9) \Rightarrow \sigma = 3$$
$$P(X \leq x_{0.8686}) = 0.8686$$

Перейдем к стандартной нормальной величине Z и стандартизуем значение $x_{0.8686}$.

$$P(Z \leq \frac{x_{0.8686} - 2}{3}) = 0.8686$$

$$\Phi(\frac{x_{0.8686} - 2}{3}) = 0.8686$$

Находим в таблице стандартного нормального распределения значение функции распределения, равное 0.8686 (то есть выполняем обратную операцию, если сравнивать с нахождением вероятностей по таблице), и «восстанавливаем» по нему значение z. Получаем значение 1.12.

$$\frac{x_{0.8686} - 2}{3} = 1.12$$
$$x_{0.8686} = 1.12 \cdot 3 + 2$$
$$x_{0.8686} = 5.36$$

Квантиль уровня 0.8686 равен 5.36.

Пример 3. Случайная величина X имеет нормальное распределение со средним значением 2 и дисперсией 9. Найти квантиль уровня $q = 0.8$.

$$X \sim N(a = 2, \sigma^2 = 9) \Rightarrow \sigma = 3$$
$$P(X \leq x_{0.8}) = 0.8$$

Перейдем к стандартной нормальной величине Z и стандартизуем значение $x_{0.8}$.

$$P(Z \leq \frac{x_{0.8} - 2}{3}) = 0.8$$

$$\Phi(\frac{x_{0.8} - 2}{3}) = 0.8$$

Так как в таблице нет значения функции распределения, равное ровно 0.8, находим значение, близкое к 0.8. Самое близкое значение – это 0.7995. «Восстанавливаем» по нему значение z. Получаем 0.84.

$$\frac{x_{0.8} - 2}{3} = 0.84$$
$$x_{0.8} = 0.84 \cdot 3 + 2$$
$$x_{0.8} = 4.52$$

Квантиль уровня 0.8 равен 4.52.

Пример 4. Случайная величина X имеет нормальное распределение со средним значением 4 и стандартным отклонением 2. Найти квантиль уровня $q = 0.27$.

$$X \sim N(a = 4, \sigma = 2) \Rightarrow \sigma = 2$$
$$P(X \leq x_{0.27}) = 0.27$$

Перейдем к стандартной нормальной величине Z и стандартизуем значение $x_{0.27}$.

$$P(Z \leq \frac{x_{0.27} - 4}{2}) = 0.27$$

$$\Phi(\frac{x_{0.27} - 4}{2}) = 0.27$$

В таблице стандартного нормального распределения нет значений меньше 0.5! Но мы знаем, что $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ и что график функции плотности стандартного нормального распределения симметричен относительно 0. Поэтому мы должны найти квантиль уровня $(1-q)$ и взять его с отрицательным знаком (почему это верно, можно убедиться, построив графики плотности и отметив на них соответствующие значения). Посчитаем: $1 - q = 1 - 0.27 = 0.73$. Самое близкое к 0.73 значение в таблице равно 0.7291. «Восстанавливаем» по нему значение z. Получаем 0.61. Теперь нужно взять его с отрицательным знаком.

$$\frac{x_{0.27} - 4}{2} = -0.61$$
$$x_{0.27} = -0.61 \cdot 2 + 4$$
$$x_{0.27} = 2.78$$

Квантиль уровня 0.27 равен 2.78.