Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2017—18 уч. год
Дифференциальные уравнения
Домашнее задание A: Дополнительное
И. В. Щуров, Н. А. Солодовников, К. Петрова
Фамилия и имя студента: Сергеев Артём Андреевич

Правила

Academic ethics policy. Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями. При решении задач, связанных с написанием программ, можно использовать исходные коды, находящиеся в открытом доступе, при условии, что такое использование не нарушает авторских прав и на источник дана ссылка в работе.

Deadline policy. В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться как решение $x = x(t)$ дифференциального уравнения

$$\dot{x} = -x$$

с начальным условием $x(0) = x_0$, где x_0 — оценка без учёта штрафа, t — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число). Просрочка более, чем на сутки, приводит к обнулению работы.

Typography policy. Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Картинки могут быть нарисованы на компьютере или вставлены в виде сканов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть аннулирована.

Grading policy. Пишите, пожалуйста, полные решения со всеми необходимыми пояснениями. Это дополнительное домашнее задание, за которое можно получить дополнительный итоговый балл (при условии стопроцентного выполнения). Все задачи весят одинаково.

Задачи

Задача 1. Найти все решения уравнения $\dot{x} = \sqrt[3]{x^2}$ с начальным условием $x(-3) = -27$.
Hint. Их больше, чем кажется!

Задача 2. Найти все начальные условия (x_0, y_0, z_0) при которых решение системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -8x, \quad \dot{z} = \sin 8z.$$

является периодическим.

Задача 3. Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = -12x^2y - 12y^{11}, \quad \dot{y} = 10x^9 + 12xy^2 + 1.$$

Существуют ли у неё неограниченные решения? Докажите!

Задача 4. Пусть $F(x,y) = x\cos\left(x^3 + y^4\right)$. Найти такое гладкое векторное поле $v(x,y)$, определённое при всех (x,y), что $L_v F = 0$ для всех (x,y).

Задача 5. Рассмотрим систему уравнений.

$$\begin{cases} \dot{x} = (y-2)^2 \\ \dot{y} = (x+1)^2 \end{cases}$$

Найти все начальные условия (x_0, y_0) для которых решение $(x(t), y(t))$ соответствующей задачи Коши определено для сколь угодно больших значений t и стремится к точке $(-1, 2)$, то есть

$$\lim_{t\to+\infty}(x(t), y(t)) = (-1, 2).$$

Задача 6. Пусть $z(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$. Рассмотрим систему $\dot{z} = Az$, где

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 0 \\ -7 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Указать все значения параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ (если такие есть), при которых особая точка $(0,0,0)$ является

a. асимптотически устойчивой;

b. устойчивой по Ляпунову.

Если таких значений параметра α нет, объяснить, почему.

Warning: *при использовании теоремы об устойчивости по первому приближению, помните о том, что бывают случаи, когда она не даёт никакого однозначного ответа. Тем не менее, вам необходимо исследовать и эти случаи тоже.*

Задача 7. Рассмотрим решение системы

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

с начальным условием $x(0) = b, y(0) = d$.

Найти все значения параметров a, b, c, d, при которых решение стремится к точке $(0,0)$ при $t \to -\infty$.

Задача 8. Рассмотрим семейство уравнений, зависящее от ϵ:

$$\dot{x} = \epsilon x + 7\epsilon - 8x - (x+7)^3 - 56$$

a. При каких значениях параметра ϵ происходит бифуркация? (Иными словами, при каких значениях ϵ система не является структурно устойчивой?)

b. Как зависит устойчивость особой точки $x = -7$ от параметра ϵ? Указать, при каких значениях параметра особая точка является асимптотически устойчивой, при каких устойчивой по Ляпунову, при каких является неустойчивой. Исследовать все случаи.

c. Как зависит число различных фазовых кривых уравнения от параметра ϵ?

Задача 9. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \dfrac{3e^x}{e^3} + 7; \\ \dot{y} = x - 6y^2 - 51y - 111. \end{cases}$$

a. Построить эскиз фазового портрета системы вблизи особой точки $(3, -4)$.
b. Является ли эта особая точка устойчивой по Ляпунову? Асимптотически устойчивой? Ответ обосновать.

Задача 10. Найти все значения параметра s, при которых у системы

$$\dot{x} = 4x + 6y, \quad \dot{y} = sx + 4y$$

имеется глобально определённый непостоянный непрерывный первый интеграл.

Задача 11. Рассмотрим уравнение гармонического осциллятора с трением:

$$\ddot{x} = -5x - \alpha\dot{x},$$

где $\alpha > 0$ — коэффициент трения (мы считаем, что сила трения пропорциональна скорости). Найти все значения параметра α, при которых осциллятор проходит положение равновесия (точку $x = 0$) бесконечно много раз.

Задача 12. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = e^{t+2x^2+5x} \sin\left(4e^{6x} - 4\right).$$

Обозначим его решение с начальным условием $x(0) = x_0$ через $x(t) = \varphi(t; x_0)$. Найти $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right|_{x_0=0}$ в точке $t = \ln 7$.

Задача 13. Докажите или опровергните следующие утверждения:
a. Если у вещественной системы дифференциальных уравнений на плоскости есть особая точка, устойчивая по Ляпунову, то и у её малого возмущения есть особая точка, устойчивая по Ляпунову.
b. Если у вещественной системы дифференциальных уравнений на плоскости есть асимптотически устойчивая особая точка, то у её малого возмущения есть особая точка, устойчивая по Ляпунову.

 Фамилия и имя студента: Сергеев Артём Андреевич