

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2017—18 уч. год

Дифференциальные уравнения

Домашнее задание А: Дополнительное

И. В. Щуров, Н. А. Солодовников, К. Петрова

Фамилия и имя студента: Попова Клавдия Сергеевна

## Правила

**Academic ethics policy.** Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями. При решении задач, связанных с написанием программ, можно использовать исходные коды, находящиеся в открытом доступе, при условии, что такое использование не нарушает авторских прав и на источник дана ссылка в работе.

**Deadline policy.** В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться как решение  $x = x(t)$  дифференциального уравнения

$$\dot{x} = -x$$

с начальным условием  $x(0) = x_0$ , где  $x_0$  — оценка без учёта штрафа,  $t$  — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число). Просрочка более, чем на сутки, приводит к обнулению работы.

**Typography policy.** Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Картинки могут быть нарисованы на компьютере или вставлены в виде сканов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть аннулирована.

**Grading policy.** Пишите, пожалуйста, полные решения со всеми необходимыми пояснениями. Это дополнительное домашнее задание, за которое можно получить дополнительный итоговый балл (при условии стопроцентного выполнения). Все задачи весят одинаково.

## Задачи

**Задача 1.** Найти все решения уравнения  $\dot{x} = \sqrt[3]{x^2}$  с начальным условием  $x(-6) = -27$ .

**Hint.** Их больше, чем кажется!

**Задача 2.** Найти все начальные условия  $(x_0, y_0, z_0)$  при которых решение системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -7x, \quad \dot{z} = \sin 8z.$$

является периодическим.

**Задача 3.** Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = -4x^2y - 12y^{11}, \quad \dot{y} = 8x^7 + 4xy^2 + 1.$$

Существуют ли у неё неограниченные решения? Докажите!

**Задача 4.** Пусть  $F(x, y) = y \cos(x^2 + y)$ . Найти такое гладкое векторное поле  $v(x, y)$ , определённое при всех  $(x, y)$ , что  $L_v F = 0$  для всех  $(x, y)$ .

**Задача 5.** Рассмотрим систему уравнений.

$$\begin{cases} \dot{x} = (y - 5)^2 \\ \dot{y} = (x - 3)^2 \end{cases}$$

Найти все начальные условия  $(x_0, y_0)$  для которых решение  $(x(t), y(t))$  соответствующей задачи Коши определено для сколь угодно больших значений  $t$  и стремится к точке  $(3, 5)$ , то есть

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = (3, 5).$$

**Задача 6.** Пусть  $z(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ . Рассмотрим систему  $\dot{z} = Az$ , где

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 6 & 0 \\ -15 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Указать все значения параметра  $\alpha \in \mathbb{R}$  (если такие есть), при которых особая точка  $(0, 0, 0)$  является

- асимптотически устойчивой;
- устойчивой по Ляпунову.

Если таких значений параметра  $\alpha$  нет, объяснить, почему.

**Warning:** при использовании теоремы об устойчивости по первому приближению, помните о том, что бывают случаи, когда она не даёт никакого однозначного ответа. Тем не менее, вам необходимо исследовать и эти случаи тоже.

**Задача 7.** Рассмотрим решение системы

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & d \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

с начальным условием  $x(0) = b, y(0) = c$ .

Найти все значения параметров  $a, b, c, d$ , при которых решение остаётся ограниченным при  $t \rightarrow +\infty$ .

**Задача 8.** Рассмотрим семейство уравнений, зависящее от  $\epsilon$ :

$$\dot{x} = \epsilon x - 9\epsilon - 4x - (x - 9)^3 + 36$$

- При каких значениях параметра  $\epsilon$  происходит бифуркация? (Иными словами, при каких значениях  $\epsilon$  система не является структурно устойчивой?)
- Как зависит устойчивость особой точки  $x = 9$  от параметра  $\epsilon$ ? Указать, при каких значениях параметра особая точка является асимптотически устойчивой, при каких устойчивой по Ляпунову, при каких является неустойчивой. Исследовать все случаи.
- Как зависит число различных фазовых кривых уравнения от параметра  $\epsilon$ ?

**Задача 9.** Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -5ee^x + 5; \\ \dot{y} = -5e^4e^y + 5. \end{cases}$$

- а. Построить эскиз фазового портрета системы вблизи особой точки  $(-1, -4)$ .  
 б. Является ли эта особая точка устойчивой по Ляпунову? Асимптотически устойчивой? Ответ обосновать.

**Задача 10.** Найти все значения параметра  $s$ , при которых у системы

$$\dot{x} = 8x + 9y, \quad \dot{y} = sx + 8y$$

имеется глобально определённый непостоянный непрерывный первый интеграл.

**Задача 11.** Рассмотрим уравнение гармонического осциллятора с трением:

$$\ddot{x} = -4x - \alpha\dot{x},$$

где  $\alpha > 0$  — коэффициент трения (мы считаем, что сила трения пропорциональна скорости).  
 Найти все значения параметра  $\alpha$ , при которых осциллятор проходит положение равновесия (точку  $x = 0$ ) бесконечно много раз.

**Задача 12.** Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = e^{t+5x^2+4x} \sin(3e^{5x} - 3).$$

Обозначим его решение с начальным условием  $x(0) = x_0$  через  $x(t) = \varphi(t; x_0)$ . Найти  $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \right|_{x_0=0}$  в точке  $t = \ln 4$ .

**Задача 13.** Докажите или опровергните следующие утверждения:

- а. Если у вещественной системы дифференциальных уравнений на плоскости есть особая точка, устойчивая по Ляпунову, то и у её малого возмущения есть особая точка, устойчивая по Ляпунову.  
 б. Если у вещественной системы дифференциальных уравнений на плоскости есть асимптотически устойчивая особая точка, то у её малого возмущения есть особая точка, устойчивая по Ляпунову.