Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2017—18 уч. год
Дифференциальные уравнения
Домашнее задание №3
И. В. Щуров, Н. А. Солодовников
Фамилия и имя студента: Агапов Семён Петрович

Правила

Academic ethics policy. Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

Deadline policy. В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться как решение $x = x(t)$ дифференциального уравнения

$$\dot{x} = -x$$

с начальным условием $x(0) = x_0$, где x_0 — оценка без учёта штрафа, t — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

Typography policy. Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Картинки могут быть нарисованы на компьютере или вставлены в виде сканов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

Grading policy. Пишите, пожалуйста, полные решения со всеми необходимыми пояснениями. За работу можно набрать максимум 100 баллов. Вы можете решить больше задач, чем на 100 баллов, чтобы подстраховаться, но зачтено может быть не больше 100 баллов.

Задачи

Определение 1. *Дифференциальной 1-формой* называется функция из некоторой области $U \subset V$ линейного пространства V в множество линейных функционалов на V. Иными словами, говорят, что задана дифференциальная 1-форма, если в каждой точке множества U задан некоторый ковектор.

Определение 2. Рассмотрим дифференциальную 1-форму ω на плоскости. Пусть P — некоторая точка плоскости. Отложим от точки P все возможные векторы v, такие что $\omega|_P(v) = 0$. Если $\omega|_P \neq 0$, все такие векторы для фиксированной точки будут лежать на одной прямой. Получится *поле направлений*, задаваемых уравнением $\omega = 0$.

Задача 1. (3 балла за каждый пункт.)

Для каждой из следующих дифференциальных форм построить поле направлений, которые задаются уравнением $\omega = 0$. (Построить прямые, проходящие через точки, указанные на рисунке 1. Отметить точки, в которых направление не задано.)

а. $\omega = 3\,dx + 4\,dy$

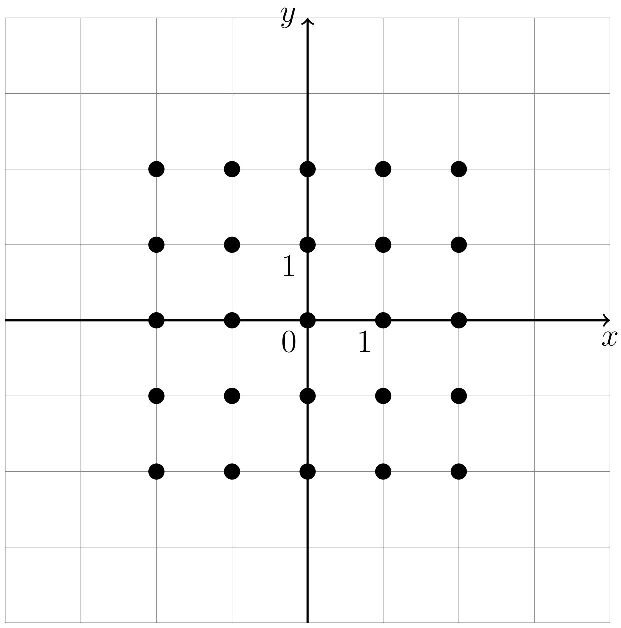

Рис. 1: Рисунок к задачам

b. $\omega = 2x\,dx + 4y\,dy$
c. $\omega = 2y\,dx - 4x\,dy$
d. $\omega = 2y\,dx + 3x\,dy$

Задача 2. (3 балла за каждый пункт.) Для каждого из следующих дифференциальных уравнений построить поле направлений, которые им задаются. (Построить прямые, проходящие через точки, указанные на рисунке 1.) Как связаны дифференциальные уравнения с дифференциальными формами из предыдущей задачи?

a. $y' = -\dfrac{3}{4}$ b. $y' = -\dfrac{x}{2y}$ c. $y' = \dfrac{y}{2x}$ d. $y' = -\dfrac{2y}{3x}$

Задача 3. Найдите уравнение фазовых кривых (для систем автономных уравнений) или уравнение интегральных кривых (для неавтономных уравнений). Допускается неявное задание кривых.

a. (6 баллов)
$-dx\left(x^3 + x^2y - 8xy^2 - 6y^3\right) + dy\left(x^3 - 8x^2y - 6xy^2\right) = 0$

b. (6 баллов)
$y' = y\left(-20x^3 + \cos(x)\right) + \left(-8x^3 + \sin(x)\right)e^{-5x^4 + \sin(x)}$

c. (6 баллов)
$y' = \dfrac{x^3 - 2x^2y - 2xy^2 - 6y^3}{-2x^3 - 2x^2y - 6xy^2}$

d. (6 баллов)
$y' = \dfrac{4x^3\sin(x^4)\cos(y^3)}{-3y^2\sin(y^3)\cos(x^4)}$

e. (6 баллов)
$dx\,(3x^2e^{y^4}\cos\left(x^3\right)) + dy\,(4y^3e^{y^4}\sin\left(x^3\right)) = 0$

Задача 4. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} = x^2 - 25.$$

 Фамилия и имя студента: Агапов Семён Петрович

a. (3 балла) Найти функцию потенциальной энергии, построить её график.
b. (3 балла) Найти функцию полной энергии (первый интеграл).
c. (5 баллов) Под графиком функции потенциальной энергии построить фазовый портрет уравнения. Отметить особые точки.
d. (3 балла) Найти все начальные условия, при которых решение уравнения является периодическим. Отметить их на фазовом портрете.
e. (3 балла) Найти все начальные условия, при которых решение уравнения имеет конечный предел при $t \to +\infty$. Отметить их на фазовом портрете.
f. (3 балла) Найти все начальные условия, при которых решение является ограниченным (остаётся внутри некоторого круга) при всех t. Все ли такие решения являются периодическими?

Задача 5. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x\left(-x^2 - y^2 + 9\right) - 4y \\ \dot{y} = 4x + y\left(-x^2 - y^2 + 9\right) \end{cases}$$

a. (5 баллов) Осуществить переход к полярным координатам (r, φ), то есть сделать замену $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ и найти уравнения на r и φ.
b. (5 баллов) Построить фазовый портрет в координатах (r, φ).
c. (3 балла) Построить фазовый портрет в исходных координатах (x, y).
d. (3 балла) Найти все периодические решения уравнения. Отметить соответствующие фазовые кривые на фазовых портретах.

Задача 6. Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = \sin(\alpha x + y), \quad \dot{y} = \sin(-x + \alpha y), \quad \dot{z} = -z/10.$$

a. (5 баллов) Показать, что решение с начальным условием, лежащим на плоскости $\{z = 0\}$, остаётся на этой плоскости.
b. (10 баллов) Построить с помощью любого компьютерного инструмента фазовые кривые на плоскости $\{z = 0\}$ при $\alpha = 1/10$, $\alpha = -1/10$ и $\alpha = 0$. Должны быть явно отмечены особые точки системы. Также нарисовать на этом графике фазовые кривые, проходящие через точки $(0.1, 0)$ и $(0.5, 0)$, на промежутке времени от 0 до 200. Что вы можете сказать о поведении соответствующих решений при $t \to +\infty$ для указанных значений параметра α?
c. (10 баллов) Построить с помощью любого компьютерного инструмента (например, можно использовать Python+Plotly) фазовые кривые в трёхмерном пространстве, проходящие через точки $(0.1, 0, \pm 1)$ и $(0.5, 0, \pm 1)$. Что вы можете сказать о поведении соответствующих решений при $t \to +\infty$?

 Фамилия и имя студента: Агапов Семён Петрович