

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2016—17 уч. год

Дифференциальные уравнения

Домашнее задание №1

И. В. Щуров, Н. А. Солодовников, Д. Вишнева

Фамилия и имя студента: Агапов Семён Петрович

## Правила

**Academic ethics policy.** Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

**Deadline policy.** В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться как решение  $x = x(t)$  дифференциального уравнения

$$\dot{x} = -x$$

с начальным условием  $x(0) = x_0$ , где  $x_0$  — оценка без учёта штрафа,  $t$  — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

**Typography policy.** Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Картинки могут быть нарисованы на компьютере или вставлены в виде сканов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

**Grading policy.** Пишите, пожалуйста, полные решения со всеми необходимыми пояснениями. За работу можно набрать максимум 100 баллов. Вы можете решить больше задач, чем на 100 баллов, чтобы подстраховаться, но зачтено может быть не больше 100 баллов.

## Задачи

**Замечание 1.** В задачах 1–6 можно нарисовать соответствующие картинки вручную (аккуратно) на бумажке и вставить скан, либо использовать любой подходящий компьютерный инструмент. Помните: на мидтерме и финале у вас не будет возможности пользоваться компьютерными инструментами.

Напоминаем, что в качестве решений дифференциальных уравнений мы рассматриваем только функции, определённые на связном подмножестве прямой (таком подмножестве, которое вместе с любыми двумя своими точками содержит отрезок между этими точками). Если в какой-то точке правая часть дифференциального уравнения не определена, то решение не может проходить через эту точку.

**Задача 1.** (10 баллов) Рассмотрим уравнение:  $\dot{x} = \frac{3}{5} \frac{t}{x}$ .

- Построить поле направлений.
- Найти общий вид решений.

с. Выразить явно решения со следующими начальными условиями. Указать область определения каждого решения. На картинке с полем направлений построить соответствующие интегральные кривые.

- $x(0) = 2$ ,
- $x(0) = -1$

**Задача 2.** (10 баллов) Рассмотрим уравнение:  $\dot{x} = -\frac{1}{2} \frac{t}{x}$ .

а. Построить поле направлений.  
 б. Найти общий вид решений.  
 с. Выразить явно решения со следующими начальными условиями. Указать область определения каждого решения. На картинке с полем направлений построить соответствующие интегральные кривые.

- $x(0) = 2$ ,
- $x(0) = -1$

**Задача 3.** (10 баллов) Рассмотрим уравнение:  $\dot{x} = 5 \frac{x}{t}$ .

а. Построить поле направлений.  
 б. Найти общий вид решений.  
 с. Выразить явно решения со следующими начальными условиями. Указать область определения каждого решения. На картинке с полем направлений построить соответствующие интегральные кривые.

- |                 |                  |                |
|-----------------|------------------|----------------|
| • $x(1) = 1$ ,  | • $x(-1) = 1$ ,  | • $x(1) = 0$ , |
| • $x(1) = -1$ , | • $x(-1) = -1$ , | • $x(-1) = 0$  |

**Задача 4.** (10 баллов) Рассмотрим уравнение:  $\dot{x} = -\frac{1}{4} \frac{x}{t}$ .

а. Построить поле направлений.  
 б. Найти общий вид решений.  
 с. Выразить явно решения со следующими начальными условиями. Указать область определения каждого решения. На картинке с полем направлений построить соответствующие интегральные кривые.

- |                 |                  |                |
|-----------------|------------------|----------------|
| • $x(1) = 1$ ,  | • $x(-1) = 1$ ,  | • $x(1) = 0$ , |
| • $x(1) = -1$ , | • $x(-1) = -1$ , | • $x(-1) = 0$  |

**Задача 5.** (20 баллов) Рассмотрим систему уравнений

а.  $\begin{cases} \dot{x} = 5x \\ \dot{y} = y \end{cases}$                       б.  $\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = 4y \end{cases}$

- Найти все решения (зависимость  $x(t)$ ,  $y(t)$ ).
- Найти уравнения фазовых кривых (зависимость  $x$  от  $y$  и/или  $y$  от  $x$ ).
- Если всё сделано правильно, фазовые кривые этого уравнения должны совпадать с интегральными кривыми для какого-то уравнения из предыдущих задач. Какого?
- Нарисовать векторное поле и фазовые кривые. Выделить фазовую кривую, соответствующую начальному условию  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 1$ .

**Задача 6.** (40 баллов) Рассмотрим уравнение.

$$\dot{x} = (-5t - 5x - 1)^2 - 2 \quad (1)$$

- a. (5 баллов) Подбрав подходящую замену, свести уравнение к автономному.
- b. (10 баллов) Нарисовать поле направлений и эскизы интегральных кривых для исходного уравнения и уравнения после замены. Как они связаны между собой?
- c. (15 баллов) Найти все решения исходного уравнения (в виде  $x = x(t)$ ).  
*Внимание!* В ходе преобразований необходимо аккуратно учитывать знаки выражений, стоящих под логарифмами. В зависимости от выбора знаков будут получаться различные семейства кривых.
- d. (5 баллов) Найти решение, удовлетворяющее начальному условию  $x(-4) = 4$ , и нарисовать соответствующую интегральную кривую.
- e. (10 баллов) Найти область определения решения в зависимости от начального условия. Исследовать предельное поведение решений при  $t \rightarrow +\infty$  и  $t \rightarrow -\infty$  (если решения определены для соответствующих значений  $t$ ). Существуют ли решения, уходящие на бесконечность за конечное время?
- f. (5 баллов) Что вы можете сказать про горизонтальные, вертикальные и наклонные асимптоты решений?

**Задача 7.** (20 баллов) Написать на любом языке программирования программу, решающую дифференциальное уравнение с одномерными фазовым пространством с помощью метода Эйлера.

- a. Построить график истинного решения и эйлеровских приближений для дифференциального уравнения  $\dot{x} = 2x^2 + 2$  и начального условия  $x(0) = 1$  на отрезке  $[0, 1/2]$ . (Выберите разумный масштаб вертикальной оси.) Эйлеровские приближения вычислить, разбивая отрезок интегрирования на 10, 30, 50, 100, 300, 500, 1000 частей.
- b. Сколько шагов нужно выбрать, чтобы в точке  $t = 0,25$  ошибка приближения не превышала  $10^{-2}$ . А в точке  $t = 0,3$ ? А в точке  $t = 0,35$ ? А в точке  $t = 0,4$ ?