

ФИО, группа: _____.

Правила

Во всех задачах требуется приводить решение и ответ. Задача без решения не засчитывается. Задача без ответа не засчитывается как полностью сделанная. Можно использовать собственноручно изготовленный лист формата А4, на котором можно записать что угодно.

Строго запрещено:

- переговариваться (с любой целью),
- пользоваться устройствами связи (с любой целью — например, в качестве калькулятора).
- списывать (за исключением использования листа А4).

Нарушение любого из этих пунктов влечет удаление с контрольной работы.

Желаем удачи!

Задача 1. (10 баллов) Найти все решения системы

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ответ:

Задача 2. (16 баллов) Рассмотрим уравнение

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Все ответы на следующие вопросы необходимо обосновать.

- а. Указать тип особой точки $(0, 0)$ (седло, фокус, узел, центр, вырожденная особая точка).

Ответ:

б. Является ли особая точка устойчивой по Ляпунову? Асимптотически устойчивой?

Ответ:

с. Имеются ли у системы непостоянные периодические решения?

Ответ:

д. Существует ли непрерывный первый интеграл, определённый в окрестности особой точки?

Ответ:

Задача 3. (10 баллов) Найти все решения системы $\dot{x} = Ax$, где $x(t) \in \mathbb{R}^5$ и

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ответ:

Задача 4. (20 баллов) При каких значениях параметра s система

$$\dot{x} = 5x - 6y, \quad \dot{y} = sx + 9y$$

является устойчивой по Ляпунову? Асимптотически устойчивой? Рассмотреть все значения s (в том числе те, при которых теорема об устойчивости по первому приближению неприменима).

Ответ:

Задача 5. (10 баллов) Рассмотрим семейство систем, зависящее от параметра ϵ :

$$\dot{x} = \epsilon x + 6\epsilon + x^2 + 14x + 48, \quad \dot{y} = -6y - 6.$$

- а. При каких значениях параметра ϵ происходит бифуркация? (Иными словами, при каких значениях ϵ система не является структурно устойчивой?)

Ответ:

- б. Как зависит число различных фазовых кривых уравнения от параметра ϵ ?

Ответ:

Задача 6. (20 баллов) Рассмотрим уравнение гармонического осциллятора, на который действует внешняя периодическая сила

$$\ddot{x} + 81x = \sin(\omega t).$$

При каких значениях $\omega \in \mathbb{R}$ любое ненулевое решение уравнения является неограниченным?

Ответ:

Задача 7. (20 баллов) Пусть (x^*, y^*) — особая точка системы

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y).$$

Предположим, что (x^*, y^*)

- а. устойчива по Ляпунову;
- б. асимптотически устойчива.

Что тогда можно сказать об устойчивости той же особой точки для системы

$$\dot{x} = -f(x, y), \quad \dot{y} = -g(x, y).$$

Будет ли она устойчива по Ляпунову? Асимптотически устойчива? Или это науке неизвестно? Привести все необходимые доказательства или контрпримеры.

Ответ:

Задача 8. (20 баллов)

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 8x^2 + 50x + 3y + 69; \\ \dot{y} = 3x + 2 \sin(y - 3) + 9. \end{cases}$$

- а. Построить эскиз фазового портрета системы вблизи особой точки $(-3, 3)$.
- б. Существует ли непостоянное решение, стремящееся к указанной особой точке при $t \rightarrow +\infty$?
Ответ обосновать.

Ответ: