

ФИО, группа: \_\_\_\_\_.

### Правила

Во всех задачах требуется приводить решение и ответ. Задача без решения не засчитывается. Задача без ответа не засчитывается. Можно использовать собственноручно изготовленный лист формата А4, на котором можно записать что угодно.

Строго запрещено:

- переговариваться (с любой целью),
- пользоваться устройствами связи (с любой целью — например, в качестве калькулятора).
- списывать (за исключением использования листа А4).

Нарушение любого из этих пунктов влечет удаление с контрольной работы.

Желаем удачи!

**Задача 1.** (10 баллов) Найти решение уравнения

$$\dot{x} = -4x + e^{-3t}$$

с начальным условием  $x(0) = 7$ .

*Ответ:*

**Задача 2.** (16 баллов) Рассмотрим уравнение

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Все ответы на следующие вопросы необходимо обосновать.

- а. Указать тип особой точки  $(0, 0)$  (седло, фокус, узел, центр, вырожденная особая точка).

*Ответ:*

б. Является ли особая точка устойчивой по Ляпунову? Асимптотически устойчивой?

*Ответ:*

с. Имеются ли ненулевые решения уравнения, стремящиеся к  $(0, 0)$  при  $t \rightarrow \infty$ ?

*Ответ:*

д. Имеются ли ненулевые решения уравнения, ограниченные при  $t < 0$ ?

*Ответ:*

**Задача 3.** (10 баллов) Найти все решения системы  $\dot{x} = Ax$ , где  $x(t) \in \mathbb{R}^5$  и

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

*Ответ:*

**Задача 4.** (20 баллов) Найти все значения параметра  $s$ , при которых у системы

$$\dot{x} = 7x + 3y, \quad \dot{y} = sx + 7y$$

имеется глобально определённый непостоянный непрерывный первый интеграл.

*Ответ:*

**Задача 5.** (15 баллов) Рассмотрим семейство уравнений, зависящее от  $\epsilon$ :

$$\dot{x} = \epsilon x - 4\epsilon + 3x - (x - 4)^3 - 12.$$

- а. При каких значениях параметра  $\epsilon$  происходит бифуркация? (Иными словами, при каких значениях  $\epsilon$  система не является структурно устойчивой?)

*Ответ:*

- б. Как зависит устойчивость особой точки  $x = 4$  от параметра  $\epsilon$ ? Указать, при каких значениях параметра особая точка является асимптотически устойчивой, при каких устойчивой по Ляпунову, при каких является неустойчивой. Исследовать все случаи.

*Ответ:*

- с. Как зависит число различных фазовых кривых уравнения от параметра  $\epsilon$ ?

*Ответ:*

**Задача 6.** (15 баллов) Рассмотрим уравнение гармонического осциллятора с трением:

$$\ddot{x} = -3x - \alpha\dot{x},$$

где  $\alpha > 0$  — коэффициент трения (мы считаем, что сила трения пропорциональна скорости). Найти все значения параметра  $\alpha$ , при которых осциллятор проходит положение равновесия (точку  $x = 0$ ) бесконечно много раз.

*Ответ:*

**Задача 7.** (20 баллов) Пусть  $z(t) \in \mathbb{R}^4$ . Рассмотрим систему  $\dot{z} = Az$ , где

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Указать все значения параметра  $\alpha \in \mathbb{R}$  (если такие есть), при которых особая точка  $(0, 0, 0, 0)$  является

- а. асимптотически устойчивой;
- б. устойчивой по Ляпунову.

Если таких значений параметра  $\alpha$  нет, объяснить, почему.

**Warning:** при использовании теоремы об устойчивости по первому приближению, помните о том, что бывают случаи, когда она не даёт никакого однозначного ответа. Тем не менее, вам необходимо исследовать и эти случаи тоже.

Ответ:

**Задача 8.** (20 баллов)

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 5y - 2 \ln(x + 4) - 5; \\ \dot{y} = 5x - 8y^2 + 14y + 9. \end{cases}$$

а. Построить эскиз фазового портрета системы вблизи особой точки  $(-3, 1)$ .

б. Является ли эта особая точка устойчивой по Ляпунову? Асимптотически устойчивой? Ответ обосновать.

*Ответ:*