

ФИО, группа: _____.

Правила

Во всех задачах требуется приводить решение и ответ. Задача без решения не засчитывается. Задача без ответа не засчитывается. Можно использовать собственноручно изготовленный лист формата А4, на котором можно записать что угодно.

Строго запрещено:

- переговариваться (с любой целью),
- пользоваться устройствами связи (с любой целью — например, в качестве калькулятора).
- списывать (за исключением использования листа А4).

Нарушение любого из этих пунктов влечет удаление с контрольной работы.

Желаем удачи!

Задача 1. (10 баллов) Найти решение уравнения

$$\dot{x} = -4x + e^{-3t}$$

с начальным условием $x(0) = 7$.

Ответ:

Задача 2. (16 баллов) Рассмотрим уравнение

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Все ответы на следующие вопросы необходимо обосновать.

- а. Указать тип особой точки $(0, 0)$ (седло, фокус, узел, центр, вырожденная особая точка).

Ответ:

б. Является ли особая точка устойчивой по Ляпунову? Асимптотически устойчивой?

Ответ:

с. Имеются ли ненулевые решения уравнения, стремящиеся к $(0, 0)$ при $t \rightarrow \infty$?

Ответ:

д. Имеются ли ненулевые решения уравнения, ограниченные при $t < 0$?

Ответ:

Задача 3. (10 баллов) Найти все решения системы $\dot{x} = Ax$, где $x(t) \in \mathbb{R}^5$ и

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ответ:

Задача 4. (20 баллов) Найти все значения параметра s , при которых у системы

$$\dot{x} = 7x + 3y, \quad \dot{y} = sx + 7y$$

имеется глобально определённый непостоянный непрерывный первый интеграл.

Ответ:

Задача 5. (15 баллов) Рассмотрим семейство уравнений, зависящее от ϵ :

$$\dot{x} = \epsilon x - 4\epsilon + 3x - (x - 4)^3 - 12.$$

- а. При каких значениях параметра ϵ происходит бифуркация? (Иными словами, при каких значениях ϵ система не является структурно устойчивой?)

Ответ:

- б. Как зависит устойчивость особой точки $x = 4$ от параметра ϵ ? Указать, при каких значениях параметра особая точка является асимптотически устойчивой, при каких устойчивой по Ляпунову, при каких является неустойчивой. Исследовать все случаи.

Ответ:

- с. Как зависит число различных фазовых кривых уравнения от параметра ϵ ?

Ответ:

Задача 6. (15 баллов) Рассмотрим уравнение гармонического осциллятора с трением:

$$\ddot{x} = -3x - \alpha\dot{x},$$

где $\alpha > 0$ — коэффициент трения (мы считаем, что сила трения пропорциональна скорости). Найти все значения параметра α , при которых осциллятор проходит положение равновесия (точку $x = 0$) бесконечно много раз.

Ответ:

Задача 7. (20 баллов) Пусть $z(t) \in \mathbb{R}^4$. Рассмотрим систему $\dot{z} = Az$, где

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Указать все значения параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ (если такие есть), при которых особая точка $(0, 0, 0, 0)$ является

- а. асимптотически устойчивой;
- б. устойчивой по Ляпунову.

Если таких значений параметра α нет, объяснить, почему.

Warning: при использовании теоремы об устойчивости по первому приближению, помните о том, что бывают случаи, когда она не даёт никакого однозначного ответа. Тем не менее, вам необходимо исследовать и эти случаи тоже.

Ответ:

Задача 8. (20 баллов)

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 5y - 2 \ln(x + 4) - 5; \\ \dot{y} = 5x - 8y^2 + 14y + 9. \end{cases}$$

а. Построить эскиз фазового портрета системы вблизи особой точки $(-3, 1)$.

б. Является ли эта особая точка устойчивой по Ляпунову? Асимптотически устойчивой? Ответ обосновать.

Ответ: