НИУ ВШЭ, Факультет гуманитарных наук, 2017-18 уч. год.
Дискретная математика для лингвистов
Письменная домашняя работа №2
Фамилия и имя: ______________________________
Вариант: Завьялов Павел Павлович

Правила

Во всех задачах требуется приводить решение и ответ. Задача без решения не засчитывается. Задача без ответа не засчитывается.

Желаем удачи!

Задание

Задача 1. На лекции присутствует 52 студентов. Каждый студент пытается угадать последовательность 4 чисел, выпавших при бросании кубика (последовательность выбрасывается одна на всех).

a. Какая вероятность того, что отдельно взятый студент угадает последовательность?
b. Какая вероятность того, что хотя бы один студент из аудитории угадает последовательность (студенты не договариваются)?
c. Студенты сидят за партами по двое и могут как-то договариваться, чтобы увеличить вероятность отгадывания (при этом после согласования каждый говорит предположение от себя). Какая в этом случае вероятность, что хотя бы кто-то угадает?

Задача 2. Бука и Бяка придумали игру. На кубике написано 3 красных числа: 1, 10 и 20, и 3 синих числа, но поскольку кубик лежит на столе, то рассмотреть можно только два из них: 8 и 12. В каждый кон бросают кубик и смотрят, что выпало. Если выпало красное число, то Бука забирает у Бяки столько монеток, сколько выпало на верхней грани. Если выпало синее число, то Бяка забирает у Буки столько монеток, сколько выпало на верхней грани. Известно, что матожидание выигранной суммы у Бяки и у Буки одинаково.

a. Чему равно матожидание выигрыша у Бяки и у Буки?
b. Чему равно третье синее число?
c. Чему равна дисперсия выигрыша у Бяки? у Буки?

Задача 3. Рассмотрим двуместный предикат $P(x, y)$, который обозначает, что x пьёт кофе в кофейне y. При этом x принимает значения из множества студентов первого курса школы лингвистики (обозначим его как L), а y принимает значения из множества кофеен в окрестности (обозначим его как C). Предикат $M(x)$, определённый на множестве M принимает значение 1(истина) тогда и только тогда, когда студент является человеком мужского пола. Записать следующие утверждения, используя предикаты $P(x, y)$, $M(x)$ функции алгебры логики, кванторы существования и всеобщности и равенство «$=$».

a. Нет кофеен, в которых никто не пьет кофе.
b. Есть пара студентов (без указания пола), которые пьют кофе в одной и той же кофейне.
c. Есть пара студентов (без указания пола), которые пьют кофе в разных кофейнях.
d. Есть студент (без указания пола), который не пьет кофе в (этих) кофейнях.
e. Есть кофейня, в которой пьют кофе только девушки.
f. Кофейни, в которую бы ходили только юноши, нет.
g. Есть кофейня, в которой пьют кофе все юноши.

Задача 4. Написать таблицу истинности для следуюих фукнций.

a. $x \& \overline{y} \vee \overline{x} \& y$;

b. $(x \vee \overline{y}) \& (\overline{x} \vee y)$.

c. $x \oplus y \oplus z \oplus 1$ ($\oplus$ — сложение по модулю 2, исключающее **ИЛИ**, **XOR**)

d. $x \oplus y \oplus x \& y$

e. $(x \oplus (x \to y)) \to x$.

Знаете ли вы более простые выражения для этих функций? Если да, то напишите их.

Задача 5. Сколькими способами можно расставить скобки в выражении $x \to y \to z \to u$ (не считая внешних скобок и скобок вокруг каждой отдельной переменной)? Для каждого способа написать таблицу истинности (удобно и наглядно делать единую таблицу для всех).

Задача 6. a. Сформулировать признаки делимости на 15 и 17 в 16-ичной системе счисления.

b. Делится ли $5\ 121\ 352\ 435\ 314\ 034\ 153\ 032\ 104_{16}$ на 15? Если не делится, то какой будет остаток от деления?

c. Делится ли $32\ 412\ 250\ 315\ 253\ 354_{16}$ на 17? Если не делится, то какой будет остаток от деления?

Задача 7. a. Найти такие числа a и b, что $a \cdot 779 + b \cdot 17629 = 1$ (или показать, что таких чисел нет).

b. Найти такие многочлены $P(x)$ и $Q(x)$, что $P(x) \cdot (x^3 + 4x^2 + 6x + 3) + Q(x) \cdot (x^3 + 5x^2 + 11x + 7) = x + 1$ (или показать, что таких многочленов нет).

Задача 8. a. Найти наибольший общий делитель чисел 38619285 и 1034365373.

b. Найти наибольший общий делитель многочленов $x^4 + x^3 + 4x^2 + 2x + 4$ и $x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 6x + 8$.

Задача 9. Преподаватель одного особо важного курса просыпается утром, собирается, идёт на электричку, едет на занятия, и иногда по пути покупает кофе (кофе иногда оказывается вкусным). Преподавателю удаётся выспаться с вероятностью $\frac{1}{4}$. Если преподаватель выспался, то на более раннюю электричку он успевает с вероятность $\frac{1}{5}$, если не выспался, то с вероятностью $\frac{3}{4}$. Если преподаватель успевает на более раннюю электричку, то он покупает кофе с вероятностью $\frac{7}{8}$, , если не успевает, то покупает только в том случае, если не выспался, да и то, только в половине случаев. В нужном месте продаётся вкусный кофе с вероятностью $\frac{10}{11}$, . Преподаватель в хорошем настроении если он выспался или если он купил вкусный кофе. Пусть событие A — преподаватель выспался, событие B — успел на более раннюю электричку, C — купил кофе, D — в нужном месте продавали вкусный кофе.

a. Написать функцию алгебры логики, зависящую от переменных A, B, C и D, которая принимает значение 1 (истина) тогда и только тогда, когда преподаватель в хорошем настроении.

b. С какой вероятностью преподаватель успеет на электричку?

c. С какой вероятностью преподаватель купит кофе?

d. С какой вероятностью у преподавателя будет хорошее настроение?

e. Известно, что преподаватель купил кофе. С какой вероятностью он успел на электричку?

f. Известно, что преподаватель купил кофе. С какой вероятностью он выспался?