

НИУ ВШЭ, Факультет гуманитарных наук, 2017-18 уч. год.

Дискретная математика для лингвистов

Письменная домашняя работа №1

Фамилия и имя: _____

Вариант: Завьялов Павел Павлович

Правила

Во всех задачах требуется приводить решение и ответ. Задача без решения не засчитывается. Задача без ответа не засчитывается.

Желаем удачи!

Задание

Задача 1. Пусть $|A| = 2$, $|B| = 8$. Какое значение может принимать мощность множеств $|A \cup B|$, $|A \cap B|$, $|A \setminus B|$, $|A \Delta B|$?

Задача 2. Лексикон младенца Наталии устроен следующим образом.

- Наталия умеет произносить гласные А, О, Ы, Я и согласные Б, В, Г, Д, Л, М, Н, П, Т, а ещё она умеет произносить «Р-Р-Р», но отдельно от всего остального.
- Слово не может содержать более двух различных гласных и более двух различных согласных, более двух различных слогов (гласная считается слогом)
- В слове не может быть две (и более) согласных подряд.
- Одинаковые слоги могут быть только в конце слова и только подряд (например, слова «мапамапа» нет).
- Если в слове больше двух одинаковых слогов, то оно является синонимом слова, в котором убраны третий и последующие повторяющиеся слоги.

Оцените лексикон младенца Наталии:

- Сколько слов длины 5 в лексиконе Наталии?
- Сколько слов, содержащих ровно одну букву А в лексиконе Наталии?
- Сколько слов, содержащих одну (возможно, повторяющуюся) гласную в лексиконе Наталии?
- Какой длины самое длинное слово в лексиконе Наталии (из нескольких синонимов выбирается самое короткое)?
- Сколько различных по смыслу слов в лексиконе Наталии?

При составлении задачи младенец Наталия находилась рядом и подтверждала всё своими словами.

Задача 3. Существуют ли такие множества A, B, C , что

$$A \cap B \neq \emptyset, \quad A \cap C = \emptyset, \quad (A \cap B) \setminus C = \emptyset?$$

Если да, приведите какой-нибудь пример. Если нет, докажите, почему.

Задача 4. Даны множества.

A : Множество нечетных чисел, не превосходящих 31.

B : Множество корней уравнения $x^2 = 4$.

C : \emptyset .

D : Множество студентов первого курса школы лингвистики, посещающих курс дискретной математики.

E : Множество натуральных чисел, заканчивающихся на 1,3,5,7,9.

F : Множество чисел a , удовлетворяющих равенству $a^4 - 16 = 0$.

G : Множество натуральных чисел b , удовлетворяющих равенству $b^2 + 4 = 0$.

H : $\{\{1, 2\}, \{2, 3, 4\}, 6, 10, 12\}$.

Найти равные множества. Найти пары множеств, в которых одно является подмножеством другого. Найти все подмножества множества H .

Задача 5. Доказать неравенство (всё решение, включая необходимые подсчёты, должны быть приведены в работе)

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2017}} > \sqrt{2017}$$

Задача 6. В выражении $(4 + a + b)^{12}$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Какие коэффициенты будут при следующих слагаемых?

- a^5b^7 ;
- a^3b^5 ;
- b^4 ?

Задача 7. Переменчивая девочка Ира любит одевать то кофточку и брючки, то платье и колготки. В шкафу у Ирины 8 платьев, 10 колготок, 12 кофточек и 8 брючек. Ирина чередует: день платье с колготками, день кофточка с брючками.

- Сколько дней Ирина может одеваться по своим правилам так, чтобы каждый день был новый комплект?
- Какое минимальное число элементов одежды нужно докупить, так, чтобы период «каждый день разный комплект» увеличился вдвое?
- Внезапно Ирина осознала, что её любимый зелёный цвет должен обязательно присутствовать в одежде. Сколько в этом случае дней можно одеваться по-разному, если у неё 4 зелёных платья, 5 зелёных колготок, 8 зелёных кофточек, 5 зелёных штанишек.

Задача 8. Найти количество слов длины 13 в русском алфавите, в которых буквы идут в алфавитном порядке (например, *агду*, *прзя*, *аря*).

Задача 9. Сколькими способами можно начинить 17 блинов, если имеется 6 начинок (каждый блин должен быть с начинкой) если

- сначала пустые блины раздали 17 гостям, а потом гости их сами начиняют;
- сначала пустые блины раздали 17 гостям, а потом гости их сами начиняют, при этом каждая начинка используется хотя бы одним гостем;
- блины наполняются на кухне, до раздачи гостям;
- блины наполняются на кухне, до раздачи гостям, при этом каждая начинка используется хотя бы один раз;
- блины разложили по 6 тарелкам, так, что в каждой тарелке блины будут с одинаковой начинкой, но пока решили не начинять (т.е. важно только то, как их по тарелкам разложили);
- блины разложили по 6 тарелкам, так, что в каждой тарелке блины будут с одинаковой начинкой, но пока решили не начинять (т.е. важно только то, как их по тарелкам разложили), при этом у пустых тарелок нет.

Задача 10. Для любого числа квадратов доказать, что они могут быть разрезаны так, чтобы из получившихся частей можно было сложить квадрат.

Задача 11. Старший брат Миша получил 12 разных пирожных. Он их делит между собой и своими двумя сёстрами. Сколькими способами он может поделить, если младенцу Наталии достаточно 2 пирожных, а с Ириной надо поделиться поровну?