

НИУ ВШЭ, Факультет гуманитарных наук, 2017-18 уч. год.

Дискретная математика для лингвистов

Письменная домашняя работа №1

Фамилия и имя: \_\_\_\_\_

Вариант: Аверин Арсений Антонович

## Правила

Во всех задачах требуется приводить решение и ответ. Задача без решения не засчитывается. Задача без ответа не засчитывается.

Желаем удачи!

## Задание

**Задача 1.** Пусть  $|A| = 4$ ,  $|B| = 4$ . Какое значение может принимать мощность множеств  $|A \cup B|$ ,  $|A \cap B|$ ,  $|A \setminus B|$ ,  $|A \Delta B|$ ?

**Задача 2.** Лексикон младенца Наталии устроен следующим образом.

- Наталия умеет произносить гласные А, О, Ы, Я и согласные Б, В, Г, Д, Л, М, Н, П, Т, а ещё она умеет произносить «Р-Р-Р», но отдельно от всего остального.
- Слово не может содержать более двух различных гласных и более двух различных согласных, более двух различных слогов (гласная считается слогом)
- В слове не может быть две (и более) согласных подряд.
- Одинаковые слоги могут быть только в конце слова и только подряд (например, слова «мапамапа» нет).
- Если в слове больше двух одинаковых слогов, то оно является синонимом слова, в котором убраны третий и последующие повторяющиеся слоги.

Оцените лексикон младенца Наталии:

- Сколько слов длины 4 в лексиконе Наталии?
- Сколько слов, содержащих ровно одну букву Ы в лексиконе Наталии?
- Сколько слов, содержащих одну (возможно, повторяющуюся) гласную в лексиконе Наталии?
- Какой длины самое длинное слово в лексиконе Наталии (из нескольких синонимов выбирается самое короткое)?
- Сколько различных по смыслу слов в лексиконе Наталии?

*При составлении задачи младенец Наталия находилась рядом и подтверждала всё своими словами.*

**Задача 3.** Существуют ли такие множества  $A, B, C$ , что

$$A \cap B \neq \emptyset, \quad A \cap C = \emptyset, \quad (A \cap B) \setminus C = \emptyset?$$

Если да, приведите какой-нибудь пример. Если нет, докажите, почему.

**Задача 4.** Даны множества.

$A$ : Множество нечетных чисел, не превосходящих 37.

$B$ : Множество корней уравнения  $x^2 = 1$ .

$C$ :  $\{\emptyset\}$ .

$D$ : Множество студентов первого курса школы лингвистики, посещающих курс дискретной математики.

$E$  : Множество натуральных чисел, заканчивающихся на 1,3,5,7,9.

$F$  : Множество чисел  $a$ , удовлетворяющих равенству  $a^4 - 1 = 0$ .

$G$  : Множество натуральных чисел  $b$ , удовлетворяющих равенству  $b^2 + 1 = 0$ .

$H$  :  $\{\{1, 2\}, 3, 7, 8, 12\}$ .

Найти равные множества. Найти пары множеств, в которых одно является подмножеством другого. Найти все подмножества множества  $H$ .

**Задача 5.** Доказать неравенство (всё решение, включая необходимые подсчёты, должны быть приведены в работе)

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2020}} > \sqrt{2020}$$

**Задача 6.** В выражении  $(3 + a + b)^{13}$  раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Какие коэффициенты будут при следующих слагаемых?

а.  $a^6b^7$ ;

б.  $a^5b^6$ ;

в.  $b^2$ ?

**Задача 7.** Переменчивая девочка Ира любит одевать то кофточку и брючки, то платье и колготки. В шкафу у Ирины 6 платьев, 10 колготок, 9 кофточек и 7 брючек. Ирина чередует: день платье с колготками, день кофточка с брючками.

- Сколько дней Ирина может одеваться по своим правилам так, чтобы каждый день был новый комплект?
- Какое минимальное число элементов одежды нужно докупить, так, чтобы период «каждый день разный комплект» увеличился вдвое?
- Внезапно Ирина осознала, что её любимый зелёный цвет должен обязательно присутствовать в одежде. Сколько в этом случае дней можно одеваться по-разному, если у неё 2 зелёных платья, 5 зелёных колготок, 5 зелёных кофточек, 4 зелёных штанишек.

**Задача 8.** Найти количество слов длины 11 в русском алфавите, в которых буквы идут в алфавитном порядке (например, *агду, прзя, аря*).

**Задача 9.** Сколькими способами можно начинить 29 блинов, если имеется 5 начинок (каждый блин должен быть с начинкой) если

- сначала пустые блины раздали 29 гостям, а потом гости их сами начиняют;
- сначала пустые блины раздали 29 гостям, а потом гости их сами начиняют, при этом каждая начинка используется хотя бы одним гостем;
- блины наполняются на кухне, до раздачи гостям;
- блины наполняются на кухне, до раздачи гостям, при этом каждая начинка используется хотя бы один раз;
- блины разложили по 5 тарелкам, так, что в каждой тарелке блины будут с одинаковой начинкой, но пока решили не начинять (т.е. важно только то, как их по тарелкам разложили);
- блины разложили по 5 тарелкам, так, что в каждой тарелке блины будут с одинаковой начинкой, но пока решили не начинять (т.е. важно только то, как их по тарелкам разложили), при этом у пустых тарелок нет.

**Задача 10.** Для любого числа квадратов доказать, что они могут быть разрезаны так, чтобы из получившихся частей можно было сложить квадрат.

**Задача 11.** Старший брат Миша получил 12 разных пирожных. Он их делит между собой и своими двумя сёстрами. Сколькими способами он может поделить, если младенцу Наталии достаточно 2 пирожных, а с Ириной надо поделиться поровну?