

ФИО, группа: \_\_\_\_\_.

**Правила**

Во всех задачах требуется приводить решение и ответ. Задача без решения не засчитывается. Задача без ответа не засчитывается. Можно использовать собственноручно изготовленный лист формата А4, на котором можно записать что угодно.

Строго запрещено:

- переговариваться (с любой целью),
- пользоваться устройствами связи (с любой целью — например, в качестве калькулятора).
- списывать (за исключением использования листа А4).

Нарушение любого из этих пунктов влечет удаление с зачётной работы.

Желаем удачи!

**Задача 1.** (10 баллов) Найти уравнение фазовой кривой системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 4y + 9 \\ \dot{y} = \frac{1}{x-4y+9} \end{cases}$$

удовлетворяющей начальному условию  $x(0) = 5$ ,  $y(0) = 3$ .

Ответ:

**Задача 2.** Рассмотрим систему уравнений.

$$\begin{cases} \dot{x} = (x - 3)^2 \\ \dot{y} = (y + 5)^2 \end{cases}$$

- а. (10 баллов) Записать уравнения всех фазовых кривых в виде зависимости  $y$  от  $x$  или  $x$  от  $y$  (допускается задание кривой в неявной форме: в виде уравнения, связывающего  $x$  и  $y$ ).

Ответ:

- б. (15 баллов) Найти все начальные условия  $(x_0, y_0)$  для которых решение  $(x(t), y(t))$  соответствующей задачи Коши определено для сколь угодно больших значений  $t$  и стремится к точке  $(3, -5)$ , то есть

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = (3, -5).$$

Ответ:

**Задача 3.** (20 баллов) Найти такую функцию  $f(x, y)$ , чтобы функция

$$H(x, y) = \cos(2x^3y^3 + 3x^3y - 3x)$$

была первым интегралом системы

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = -6x^5y^6 - 9x^5y^4 + 3x^3y^3$$

Ответ:

**Задача 4.** (20 баллов) Найти все значения параметра  $\alpha$ , при которых у следующей системы существует хотя бы один непрерывный глобально определенный непостоянный первый интеграл. Найти этот первый интеграл для всех значений  $\alpha$ , при которых он существует.

$$\dot{x} = (\alpha + 3)x, \quad \dot{y} = (3\alpha + 3)y$$

Ответ:

**Задача 5.** Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} = (-\alpha + x)(x - 3)(x + 2).$$

- а. (10 баллов) Найти первый интеграл при  $\alpha = 2$ .
- б. (15 баллов) Построить фазовый портрет уравнения в координатах  $(x, \dot{x})$  при  $\alpha = 2$ . Отметить на нём:
- все особые точки
  - как минимум одну траекторию, соответствующую непостоянному периодическому решению
  - все траектории, стремящиеся к какой-либо особой точке в прямом или обратном времени (при  $t \rightarrow +\infty$  или  $t \rightarrow -\infty$  соответственно)
  - как минимум одну траекторию, соответствующую решению, которое не является постоянным, периодическим и не имеет конечного предела ни в прямом, ни в обратном времени.
- с. (20 баллов) Найти все значения параметра  $\alpha \in (-2, 3)$ , при которых существует хотя бы одна траектория, соответствующая непостоянному решению, имеющему различные конечные пределы при  $t \rightarrow +\infty$  и  $t \rightarrow -\infty$ .

Ответ: