ФИО, группа: _____.

Правила

Во всех задачах требуется приводить решение и ответ. Задача без решения не засчитывается. Задача без ответа не засчитывается. Можно использовать собственноручно изготовленный лист формата А4, на котором можно записать что угодно.

Строго запрещено:

- переговариваться (с любой целью),
- пользоваться устройствами связи (с любой целью — например, в качестве калькулятора).
- списывать (за исключением использования листа А4).

Нарушение любого из этих пунктов влечет удаление с контрольной работы.

Желаем удачи!

Задача 1. Найти все интегральные кривые уравнения

$$\dot{x} = 4t^2 + 4tx + x^2 - 27,$$

являющиеся прямыми.

Решение. Выделяя полный квадрат, запишем уравнение в виде

$$\dot{x} = (2t + x)^2 - 27.$$

Получающееся уравнение имеет вид $\dot{x} = f(ax + bt)$ и приводится к уравнению с разделяющимися переменными линейной заменой вида $z = ax + bt$. Заметим, что линейная замена переводит прямые в прямые, поэтому для нового уравнения нас также будут интересовать прямолинейные интегральные кривые. Итак, пусть $z = 2t + x$. Тогда

$$\dot{z} = \frac{d}{dt}(x + 2t) = \dot{x} + 2 = (2t + x)^2 - 27 + 2 = z^2 - 25.$$

Таким образом, имеем уравнение

$$\dot{z} = z^2 - 25.$$

Решениями этого уравнения являются прямые $z = \pm 5$ и кривые, задающиеся уравнением вида

$$t - t_0 = \int_{z_0}^{z} \frac{d\zeta}{\zeta^2 - 25}. \tag{1}$$

Последние явно не являются прямыми, поскольку прямые задаются линейными функциями, а производная линейной функции — константа; уравнение (1) может задавать прямую только если выражение под интегралом является константой.

Таким образом, единственные решения, которые нас интересуют — это $z = \pm 5$. В результате обратного преобразования получаем: $x = -2t \pm 5$.

Ответ: $-2t - 5$, $-2t + 5$

Задача 2. Пусть $(x(t), y(t))$ — решение системы

$$\dot{x} = 6x^4, \quad \dot{y} = -7y \tag{2}$$

с начальным условием $x(0) = 1$, $y(0) = 6$.

Найти $\inf_t y(t)$ и $\sup_t y(t)$, где инфимум и супремум берутся по всем t, при которых решение определено.

Решение. Здесь необходимо понимать, что $x(t)$ и $y(t)$ — это не отдельные функции, являющиеся решением соответствующих уравнений, а две компоненты одной вектор-функции, являющейся решением всего уравнения целиком. В частности, если $x(t)$ не определена при каких-то t, то и решение в целом не определено при этих t.

Рассмотрим первое уравнение. Согласно формуле Барроу, его решение записывается в виде

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{6\xi^4} = -\frac{1}{18x^3} + \frac{1}{18x_0^3}.$$

Для начального условия $x(0) = 1$ имеем:

$$t = \frac{1}{18} - \frac{1}{18x^3}.$$

Выражая x, получаем:

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{1-18t}}.$$

Нетрудно видеть, что решение этого уравнения имеет вертикальную асимптоту: уходит на бесконечность за конечное время при $t = 1/18$. После этого момента решение не определено.

Обратимся теперь ко второму уравнению. Оно имеет решение $y(t) = y_0 e^{-7t}$. С учётом начального условия $y(0) = 6$, имеем:

$$y(t) = 4e^{-7t}.$$

Эта функция убывает по t и при $t \to -\infty$ стремится к $+\infty$. Следовательно, $\sup_t y(t)$ не существует (или равен $+\infty$, что то же самое). Для нахождения $\inf_t y(t)$ нужно учесть, что $t < 1/18$. Чем больше t, тем меньше значение функции — значит, $\inf_{t<1/18} y(t) = y(1/18) = 6e^{-7/18}$.

Ответ: $\sup_t y(t)$ *не определён,* $\inf_t y(t) = 6e^{-7/18}$.

Задача 3. Рассмотрим систему

$$\dot{y} = x^5 y^8 (\beta x + 2xy), \quad \dot{x} = x^5 y^8.$$

a. Найти все значения параметра $\beta \in \mathbb{R}$, при которых система имеет глобальный непостоянный непрерывный первый интеграл.
b. Для всех найденных значений β найти первый интеграл.

Решение. Запишем уравнение на фазовые кривые, действующее при $x \neq 0$ и $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \beta x + 2xy \tag{3}$$

Это линейное уравнение и его можно решить, например, с помощью интегрирующего множителя. Переходим к соответствующей 1-форме:

$$dy + (-\beta x - 2xy)dx = 0.$$

Интегрирующим множителем является функция $I(x,y) = e^{-\int 2x\,dx} = e^{-x^2}$. Проверим, что получающееся уравнение

$$e^{-x^2} dy + e^{-x^2}(\beta - 2xy)dx = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах. Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial x} e^{-x^2} = -2xe^{-x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-x^2}(\beta - 2xy)\right).$$

Следовательно, существует такая функция H, что интегральные кривые уравнения (3) (а значит и фазовые кривые исходного уравнения) являются её линиями уровня, а значит сама функция H является первым интегралом исходной системы.

Все входящие в уравнение функции являются непрерывными и функция H получается интегрированием каких-то непрерывных функций и поэтому сама является непрерывной при любом β.

Для уверенности, а также для решения пункта b), найдём функцю H явно стандартным способом.

$$H(x,y) = \int e^{-x^2} dy = ye^{-x^2} + C(x)$$
$$C'(x) - 2xye^{-x^2} = -2xye^{-x^2} - e^{-x^2}\beta x$$
$$C(x) = -\int e^{-x^2}\beta x\, dx = -\frac{\beta}{2}\int e^{-x^2} d(x^2) = \frac{\beta}{2}e^{-x^2}$$
$$H(x,y) = \left(y + \frac{\beta}{2}\right)e^{-x^2}$$

Ответ: a) При всех β; b) $\left(\frac{\beta}{2} + y\right)e^{-x^2}$

Замечание. Здесь можно было сделать несколько ошибок.

a. Можно было ошибочно счесть, что если уравнение на фазовые кривые не является уравнением в полных дифференциалах само по себе, то и исходное уравнение не имеет первого интеграла. Как показывает приведенное решение, это неверно.
b. Можно было решать уравнение как уравнение с разделяющимися переменными и в результате выражения константы получить первый интеграл с логарифмом, который не будет непрерывным всюду. Здесь важно понимать, что на первый интеграл можно навешивать любую функцию «снаружи» и получить новый первый интеграл — таким образом, даже если полученный вами первый интеграл оказывается не непрерывным, это не значит, что непрерывного первого интеграла не существует.
c. В некоторых решениях получался ответ, в котором β зависит от фазовых переменных. Этот ответ не имеет смысла. β — параметр, с точки зрения фазовых переменных это просто какая-то константа. И нас интересует, при каких значениях этого параметра будет существовать первый интеграл, определенный и непрерывный (при любых x и y).

Задача 4. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = 5xz, \quad \dot{y} = -6y, \quad \dot{z} = 0.$$

Найти все начальные условия, при которых решение имеет конечный предел при $t \to +\infty$.

Решение. Заметим, что из последнего уравнения следует, что $z(t) = z_0 = const$. Таким образом, z-компонента решения всегда имеет конечный предел при $t \to +\infty$. Из второго уравнения следует, что $y(t) = y_0 e^{-6t}$. Эта функция также всегда имеет конечный предел при $t \to +\infty$. Остаётся разобраться с первым уравнением. В нём участвуют две фазовые переменные — x и z. Но, к счастью, из третьего уравнения мы знаем, что z на самом деле не меняется, поэтому первое уравнение имеет решение $x(t) = x_0 e^{5z_0 t}$. Эта функция имеет конечный предел при $t \to +\infty$ в двух случаях: либо $z_0 \le 0$ (при $z_0 = 0$ функция является константой, при $z_0 < 0$ стремится к нулю), либо $x_0 = 0$ (тогда функция тождественно нулевая).

Ответ: Подходят два множества: $x_0 = 0$ и $z_0 \le 0$.

Задача 5. При каких $\alpha > 0$ уравнение

$$\dot{x} = (x^4)^\alpha$$

имеет решение, обладающее следующими двумя свойствами:

- $x(0) = -4$;
- существует такое t, что $x(t) > 0$?

Решение. Уравнение точно имеет решение $x \equiv 0$ при любых значениях $\alpha > 0$. Соответствующая интегральная кривая делит расширенное фазовое пространство на две части — верхнюю полуплоскость и нижнюю полуплоскость. Интегральная кривая, соответствующая решению, указанному в условии, должна пересечь прямую $x \equiv 0$, поскольку выходит из точки в нижней полуплоскости, но должна оказаться в верхней полуплоскости. Это возможно только в том случае, когда нарушается условие теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения, иначе интегральным кривым запрещено пересекаться.

Следовательно, любое $\alpha > 1/4$ не подходит: при таких α функция в правой части является C^1 гладкой (что можно доказать явным дифференцированием). При $\alpha = 1/4$ правая часть перестаёт быть гладкой в нуле, но решения получающегося при этом уравнения $\dot{x} = |x|$ имеют вид $x(t) = x_0 e^t$ при $x_0 > 0$ и $x(t) = x_0 e^{-t}$ при $x_0 < 0$. Эти решения не достигают прямой $x = 0$ за конечное время и $\alpha = 1/4$ также не подходит. Остаётся доказать, что любое $\alpha < 1/4$ подходит.

Рассмотрим наше уравнение при $x < 0$. В этом случае $(x^4)^\alpha = (-x)^{4\alpha}$. (Возводить отрицательные числа в дробные степени нельзя, потому что если бы было можно, то $-1 = \sqrt[3]{-1} = (-1)^{1/3} = (-1)^{2/6} = ((-1)^2)^{1/6} = 1^{1/6} = 1$.) Уравнение принимает вид

$$\dot{x} = (-x)^{4\alpha}$$

и мгновенно решается

$$t = \int (-x)^{-4\alpha} dx = -\frac{1}{4\alpha + 1}(-x)^{-4\alpha+1} + C.$$

Выражая x, имеем:

$$x(t) = -((1 - 4\alpha)(t - C))^{\frac{1}{1-4\alpha}} = -A(t - C)^\beta,$$

где $A > 0$ и $\beta > 1$. Это уравнение функции, определенной при $t < C$ и имеющей вид левой половинки «параболы», направленной ветвями вниз. Константа C задаёт горизонтальные сдвиги; понятно, что её можно подобрать таким образом, чтобы выполнялось начальное условие $x(0) = -4$. (Точное численное значение C нам не нужно и мы не будем его находить.)

Аналогично можно решить уравнение при $x > 0$, семейство решений будет отличаться только знаком.

Наконец, можно «склеить» решение из двух кусочков, подбирая подходящие горизонтальные сдвиги на каждом кусочке.

Ответ: При $\alpha < 1/4$

Задача 6. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = y^3, \quad \dot{y} = -\alpha + x^2 - 8x + 10.$$

a. Найти уравнения фазовых кривых и построить фазовый портрет для $\alpha = 3$. Отметить на фазовом портрете все особые точки. Не забудьте отметить направление движения стрелочками!
Решение. Это уравнение похоже на консервативное уравнение с одной степенью свободы. Запишем уравнение фазовых кривых:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\alpha + x^2 - 8x + 10}{y^3}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными и оно мгновенно решается.

$$y^3\, dy = (-\alpha + x^2 - 8x + 10)dx$$
$$\frac{y^4}{4} - \left(-\alpha x + \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 10x\right) = C$$

Фазовый портрет можно нарисовать с помощью тех же приёмов, с помощью которых рисуется фазовый портрет консервативных уравнений с одной степенью свободы. Разница состоит только в том, что вместо корня второй степени нужно вычислять корень 4-й степени, что не влияет на качественную картинку. (Впрочем, см. замечание ниже.)
Запишем функцию *как бы полной энергии*:

$$U(x) = \alpha x - \frac{x^3}{3} + 4x^2 - 10x$$

Построим её график и фазовый портрет, см. рис. 1. Особые точки лежат на горизонтальной оси и задаются уравнением $x^2 - 8x + 7 = 0$.
Ответ: Особые точки 7 *и* 1.
Замечание. В отличие от обычного консервативного уравнения фазовые кривые, стремящиеся к особой точке $(7, 0)$, стремятся к ней вертикально, а не наклонно. Это связано с тем фактом, что график функции $\sqrt[4]{x^2}$ имеет вертикальные касательные в нуле. Никто до этого не догадался. Оценка, впрочем, за это не снижалась.

b. При каких значения параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ существует непостоянное периодическое решение?
Решение. Если $-\alpha + x^2 - 8x + 10 \geq 0$ при всех x, то периодических решений нет, поскольку в этом случае $\dot{y} \geq 0$ и y всегда неубывает, а непрерывная неубывающая периодическая функция обязательно является константой. Для тех α, для которых уравнение $-\alpha + x^2 - 8x + 10 = 0$ имеет два корня, существуют две особые точки дифференциального уравнения. В одной из них функция как бы потенциальной энергии имеет минимум и в окрестности этой точки фазовые кривые замкнуты. Они и соответствуют периодическим решениям. Решая неравенство «дискриминант больше нуля», получаем ответ.
Ответ: При $\alpha > -6$

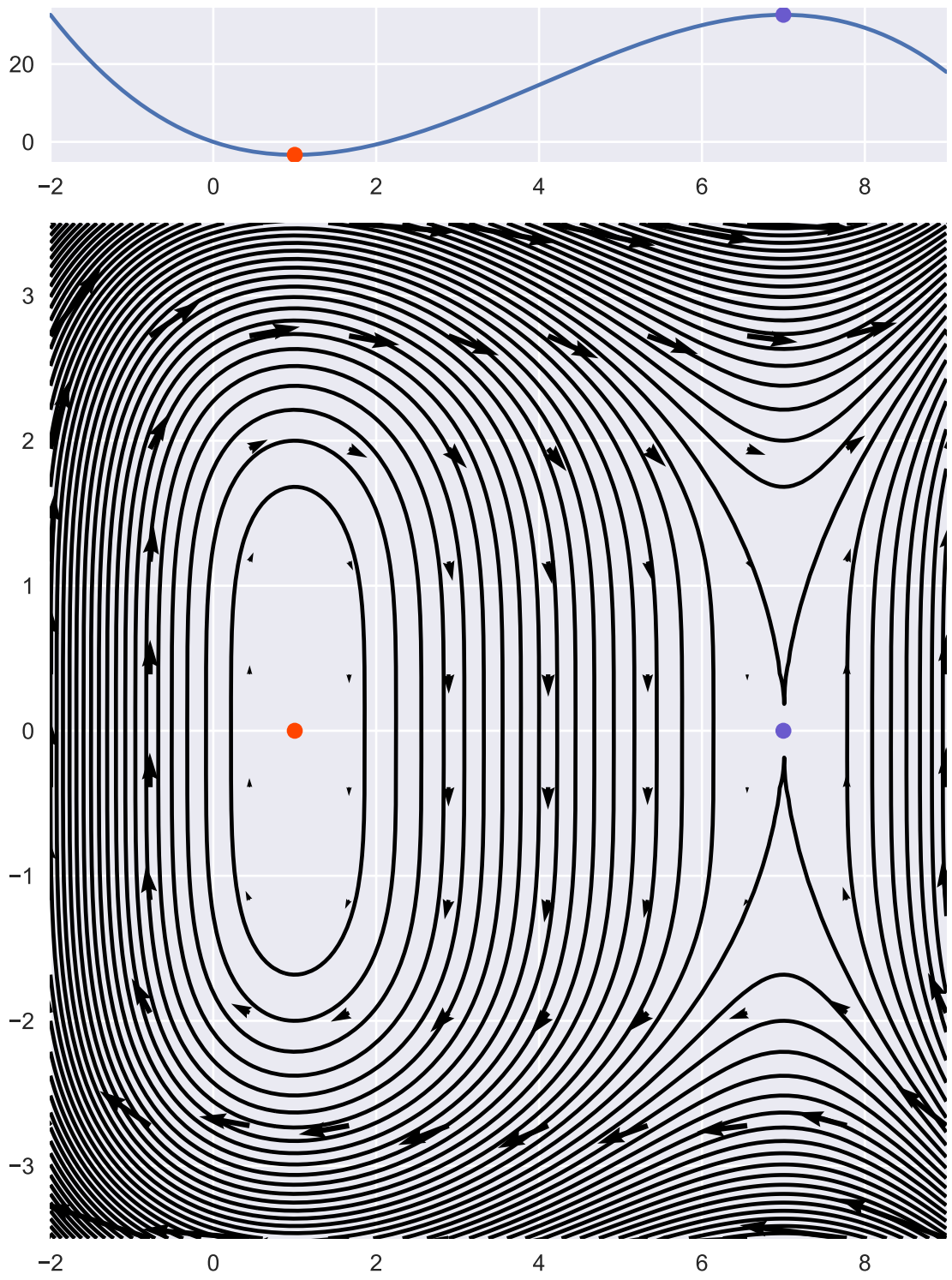

Рис. 1: Как бы потенциальная энергия и фазовый портрет