Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2016—17 уч. год
Дифференциальные уравнения
Домашнее задание №3
И. В. Щуров, Н. А. Солодовников, Д. Вишнев
Фамилия и имя студента: Солодовников Никита

Правила

Academic ethics policy. Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

Deadline policy. В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться как решение $x = x(t)$ дифференциального уравнения

$$\dot{x} = -x$$

с начальным условием $x(0) = x_0$, где x_0 — оценка без учёта штрафа, t — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

Typography policy. Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Картинки могут быть нарисованы на компьютере или вставлены в виде сканов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

Grading policy. Пишите, пожалуйста, полные решения со всеми необходимыми пояснениями. За работу можно набрать максимум 100 баллов. Вы можете решить больше задач, чем на 100 баллов, чтобы подстраховаться, но зачтено может быть не больше 100 баллов.

Задачи

Определение 1. Уравнение $y' = F(x, y)$ называется *однородным*, если $F(\lambda x, \lambda y) = F(x, y)$ для любых λ, x, y.

Задача 1. Рассмотрим уравнение

$$y' = \frac{x^3 - x^2y + 2xy^2 + 3y^3}{-x^3 + 2x^2y + 3xy^2} \tag{1}$$

a. (3 балла) Показать, что уравнение является однородным.
b. (3 балла) Нарисовать три различные изоклины для уравнения (1). (Подсказка: как *в принципе* могут выглядеть изоклины однородного уравнения?)
c. (3 балла) Нарисовать эскиз поля направлений для этого уравнения.
d. (3 балла) Рассмотрим замену $z = y/x$. В какие кривые перейдут изоклины, найденные в пункте b, в координатах (z, x)? Нарисуйте их.
e. (4 балла) Запишите дифференциальное уравнение на новую неизвестную функцию z.

f. (5 баллов) Решите уравнение (1). (Не требуется находить решение в виде явной функции $y = y(x)$, достаточно неявного задания.)

Замечание 2. Аналогичным образом (с помощью замены $z = y/x$) можно любое однородное уравнение свести к уравнению с разделяющимися переменными.

Определение 3. Уравнение вида

$$y' + f(x)y + b(x) = 0,$$

где f и b — какие-то гладкие функции, называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка с переменными коэффициентами.*

Задача 2. Рассмотрим уравнение

$$y' + f(x)y + b(x) = 0,$$

где функция f не является тождественным нулём.

Перейдем к соответствующей дифференциальной 1-форме:

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y + b(x) = 0 \tag{2}$$

$$dy + (f(x)y + b(x))dx = 0 \tag{3}$$

a. (5 баллов) Является ли это уравнение уравнением в полных дифференциалах?

b. (5 баллов) Умножим уравнение (3) на функцию

$$I(x, y) = e^{\int f(x)dx}.$$

Является ли получающееся уравение уравнением в полных дифференциалах?

Замечание 4. Функция I, при умножении на которую уравнение становится уравнением в полных дифференциалах, называется *интегрирующим множителем.* Интегрирующий множитель всегда существует (по крайней мере, локально), но найти его — не проще, чем решить уравнение. Впрочем, для некоторых классов уравнений он находится явно в общем виде (как это происходит с линейным уравнением), а для других его можно попытаться угадать.

Задача 3. (10 баллов.) С помощью нахождения интегрирующего множителя решить уравнение.

$$-10xy - 4x + y' = 0.$$

Задача 4. Найдите уравнение фазовых кривых (для систем автономных уравнений) или уравнение интегральных кривых (для неавтономных уравнений). Допускается неявное задание кривых.

a. (6 баллов)
$$\begin{cases} \dot{x} = -2x^3 - 2x^2y - 3xy^2 \\ \dot{y} = x^3 - 2x^2y - 2xy^2 - 3y^3 \end{cases}$$

b. (6 баллов)
$$y' = y\left(-25x^4 + \sin(x)\right) + \left(10x^4 + e^x\right)e^{-5x^5 - \cos(x)}$$

c. (6 баллов)
$$y' = \frac{-3x^2\sin(y^2)\cos(x^3)}{2y\sin(x^3)\cos(y^2)}$$

d. (6 баллов)
$-dx\left(x^3+4x^2y+4xy^2-3y^3\right)+dy\left(4x^3+4x^2y-3xy^2\right)=0$

e. (6 баллов)
$\begin{cases}\dot{x}=-5y^4\sin\left(x^2\right)\sin\left(y^5\right)\\ \dot{y}=-2x\cos\left(x^2\right)\cos\left(y^5\right)\end{cases}$

Задача 5. Рассмотрим уравнение
$$\ddot{x}=x^2+5x-6.$$

a. (3 балла) Найти функцию потенциальной энергии, построить её график.
b. (3 балла) Найти функцию полной энергии (первый интеграл).
c. (5 баллов) Под графиком функции потенциальной энергии построить фазовый портрет уравнения. Отметить особые точки.
d. (3 балла) Найти все начальные условия, при которых решение уравнения является периодическим. Отметить их на фазовом портрете.
e. (3 балла) Найти все начальные условия, при которых решение уравнения имеет конечный предел при $t\to+\infty$. Отметить их на фазовом портрете.
f. (3 балла) Найти все начальные условия, при которых решение является ограниченным (остаётся внутри некоторого круга) при всех t. Все ли такие решения являются периодическими?

Задача 6. Рассмотрим систему уравнений
$$\begin{cases}\dot{x}=x\left(-x^2-y^2+36\right)+5y\\ \dot{y}=-5x+y\left(-x^2-y^2+36\right)\end{cases}$$

a. (5 баллов) Осуществить переход к полярным координатам (r,φ), то есть сделать замену $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ и найти уравнения на r и φ.
b. (5 баллов) Найти решение получившихся уравнения на r и φ.
c. (3 балла) Построить фазовый портрет в координатах (r,φ).
d. (3 балла) Построить фазовый портрет в исходных координатах (x,y).
e. (3 балла) Найти все периодические решения уравнения. Отметить соответствующие фазовые кривые на фазовых портретах.

Задача 7. Рассмотрим систему уравнений
$$\dot{x}=\sin(\alpha x+y),\quad \dot{y}=\sin(-x+\alpha y),\quad \dot{z}=-z/10.$$

a. (5 баллов) Показать, что решение с начальным условием, лежащим на плоскости $\{z=0\}$, остаётся на этой плоскости.
b. (10 баллов) Построить с помощью любого компьютерного инструмента фазовые кривые на плоскости $\{z=0\}$ при $\alpha=1/10$, $\alpha=-1/10$ и $\alpha=0$. Должны быть явно отмечены особые точки системы. Также нарисовать на этом графике фазовые кривые, проходящие через точки $(0.1,0)$ и $(0.5,0)$, на промежутке времени от 0 до 200. Что вы можете сказать о поведении соответствующих решений при $t\to+\infty$ для указанных значений параметра α?
c. (10 баллов) Построить с помощью любого компьютерного инструмента (например, можно использовать Python+Plotly) фазовые кривые в трёхмерном пространстве, проходящие через точки $(0.1,0,\pm1)$ и $(0.5,0,\pm1)$. Что вы можете сказать о поведении соответствующих решений при $t\to+\infty$?

 Фамилия и имя студента: Солодовников Никита