

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2015—16 уч. год
Дифференциальные уравнения
Домашнее задание №4: Подготовка к итоговой работе
И. В. Щуров, М. Заварзин
Фамилия и имя студента: Галиакберов Денис Андреевич

Правила

Academic ethics policy. Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями. При решении задач, связанных с написанием программ, можно использовать исходные коды, находящиеся в открытом доступе, при условии, что такое использование не нарушает авторских прав и на источник дана ссылка в работе.

Deadline policy. В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться как решение $x = x(t)$ дифференциального уравнения

$$\dot{x} = -x$$

с начальным условием $x(0) = x_0$, где x_0 — оценка без учёта штрафа, t — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

Typography policy. Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо сверстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Картинки могут быть нарисованы на компьютере или вставлены в виде сканов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть аннулирована.

Grading policy. Это необязательное ДЗ: вы можете получить итоговую оценку 10, не сделав его вовсе (если всё остальное у вас сделано на 10). Но оно позволит увеличить вашу итоговую оценку: каждая задача стоит 0,1 от итоговой оценки. (Но в сумме вы можете получить не более, чем +1 итоговый балл за все дополнительные ДЗ.)

Задачи

Задача 1. Найти все решения уравнения $\dot{x} = \sqrt[3]{x^2}$ с начальным условием $x(-4) = -125$, если они существуют.

Задача 2. Найти все решения уравнения $\dot{x} = 36t^2 - 12tx + x^2 + 6$ с начальным условием $x(6) = 36$, если они существуют.

Задача 3. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = x(x + y - 3), \quad \dot{y} = -y(x + y - 3). \quad (1)$$

а. Построить её фазовый портрет. Отметить все положения равновесия. На фазовом портрете нарисовать траектории, проходящие через точки $(1, 1)$ и $(1/2, 3)$ (это две разные траектории). Не забудьте на всех траекториях указать направление движения.

- b. Для решения $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ с начальным условием $x(0) = 27, y(0) = -1$ найти $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t)$ и $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t)$.

Задача 4. Найти все значения параметра $\alpha \in \mathbb{R}$, при которых существует непостоянное, но равномерно ограниченное (по всем t) решение уравнения

$$\ddot{x} = -x^2 + 6x + \alpha.$$

Задача 5. Пусть $z(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$. Рассмотрим систему $\dot{z} = Az$, где

$$A = \begin{pmatrix} -9 & -6 & 0 \\ 15 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Указать все значения параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ (если такие есть), при которых особая точка $(0, 0, 0)$ является

- асимптотически устойчивой;
- устойчивой по Ляпунову.

Если таких значений параметра α нет, объяснить, почему.

Warning: при использовании теоремы об устойчивости по первому приближению, помните о том, что бывают случаи, когда она не даёт никакого однозначного ответа. Тем не менее, вам необходимо исследовать и эти случаи тоже.

Задача 6. Рассмотрим решение системы

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & d \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

с начальным условием $x(0) = c, y(0) = a$.

Найти все значения параметров a, b, c, d , при которых решение стремится к точке $(0, 0)$ при $t \rightarrow -\infty$.

Задача 7. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = \alpha + x^2 - 20x, \quad \dot{y} = -7y$$

- Найти значение параметра $\alpha = \alpha^*$, при котором система не является структурно устойчивой (происходит бифуркация).
- Нарисовать эскизы фазовых портретов системы при $\alpha < \alpha^*, \alpha = \alpha^*, \alpha > \alpha^*$.

Задача 8. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 3y - 6 \ln(x - 1) - 9; \\ \dot{y} = 3x - 6 \ln(y - 2) - 6. \end{cases}$$

- Построить эскиз фазового портрета системы вблизи особой точки $(2, 3)$.
- Является ли эта особая точка устойчивой по Ляпунову? Асимптотически устойчивой? Ответ обосновать.