

ФИО, группа: _____.

Правила

Во всех задачах требуется приводить решение и ответ. Задача без решения не засчитывается. Задача без ответа не засчитывается. Можно использовать собственноручно изготовленный лист формата А4, на котором можно записать что угодно.

Строго запрещено:

- переговариваться (с любой целью),
- пользоваться устройствами связи (с любой целью — например, в качестве калькулятора).
- списывать (за исключением использования листа А4).

Нарушение любого из этих пунктов влечет удаление с работы.

Желаем удачи!

Задача 1. (10 баллов) Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = e^{t+3x^2+5x} \sin(6e^{3x} - 6).$$

Обозначим его решение с начальным условием $x(0) = x_0$ через $x(t) = \varphi(t; x_0)$. Найти $\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \Big|_{x_0=0}$ в точке $t = \ln 5$.

Ответ:

Задача 2. (10 баллов) Пусть $z(t) \in \mathbb{R}^6$. Рассмотрим систему $\dot{z} = Az$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- a. Найти вещественное решение этой системы с произвольным вещественным начальным условием $z(0) = z_0$.
- b. Является ли особая точка 0 (начало координат) устойчивой по Ляпунову? Асимптотически устойчивой?

Ответ:

Задача 3. (20 баллов) Пусть $z(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$. Рассмотрим систему $\dot{z} = Az$, где

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 10 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Указать все значения параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ (если такие есть), при которых особая точка $(0, 0, 0)$ является

- a. асимптотически устойчивой;
- b. устойчивой по Ляпунову.

Если таких значений параметра α нет, объяснить, почему.

Warning: при использовании теоремы об устойчивости по первому приближению, помните о том, что бывают случаи, когда она не даёт никакого однозначного ответа. Тем не менее, вам необходимо исследовать эти случаи тоже.

Ответ:

Задача 4. (20 баллов) Рассмотрим решение системы

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

с начальным условием $x(0) = b, y(0) = c$.

Найти все значения параметров a, b, c, d , при которых решение остаётся ограниченным при $t \rightarrow -\infty$.

Ответ:

Задача 5. (20 баллов) Рассмотрим систему

$$\dot{x} = 6x + y, \quad \dot{y} = 6y.$$

Найти такую замену координат $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ в окрестности точки $(-6, 1)$, что система в новых координатах примет вид

$$\dot{u} = 0, \quad \dot{v} = h(u, v).$$

(Требуется найти функции f и g , находить функцию h не требуется.)

Ответ:

Задача 6. (20 баллов) Докажите или опровергните следующие утверждения:

- a. Если у вещественной системы дифференциальных уравнений на плоскости есть особая точка, устойчивая по Ляпунову, то и у её малого возмущения есть особая точка, устойчивая по Ляпунову.
- b. Если у вещественной системы дифференциальных уравнений на плоскости есть асимптотически устойчивая особая точка, то у её малого возмущения есть особая точка, устойчивая по Ляпунову.

Ответ:

Задача 7. (20 баллов) Рассмотрим систему

$$\dot{x} = \alpha + x^2 - 4x, \quad \dot{y} = -4y$$

- a. Найти значение параметра $\alpha = \alpha^*$, при котором система не является структурно устойчивой (происходит бифуркация).
- b. Нарисовать эскизы фазовых портретов системы при $\alpha < \alpha^*$, $\alpha = \alpha^*$, $\alpha > \alpha^*$.

Ответ:

Задача 8. (20 баллов)

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -5y - 7 \ln(x) - 10; \\ \dot{y} = -5x - 21y^2 - 91y - 93. \end{cases}$$

- a. Построить эскиз фазового портрета системы вблизи особой точки $(1, -2)$.
- b. Является ли эта особая точка устойчивой по Ляпунову? Асимптотически устойчивой? Ответ обосновать.