Линейные функции и отображения

ЛЕКЦИЯ 2

Линейные функции. Что в них особенного?

Мы привыкли, что линейная функция – это функция вида

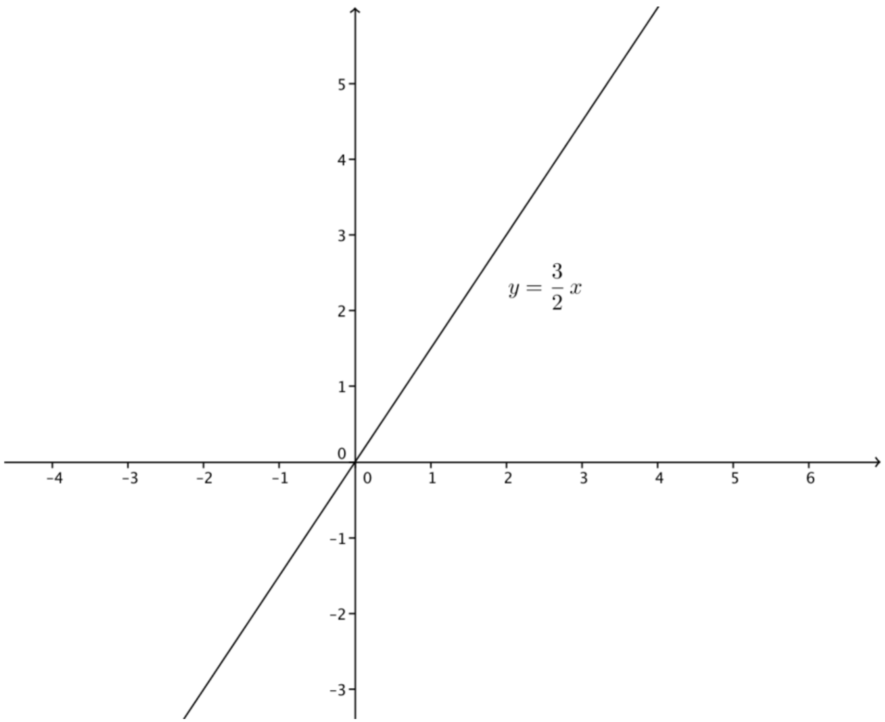
$$y = ax + b,$$

где $a \neq 0$

Что характерно именно для таких функций, чем они выделяются?

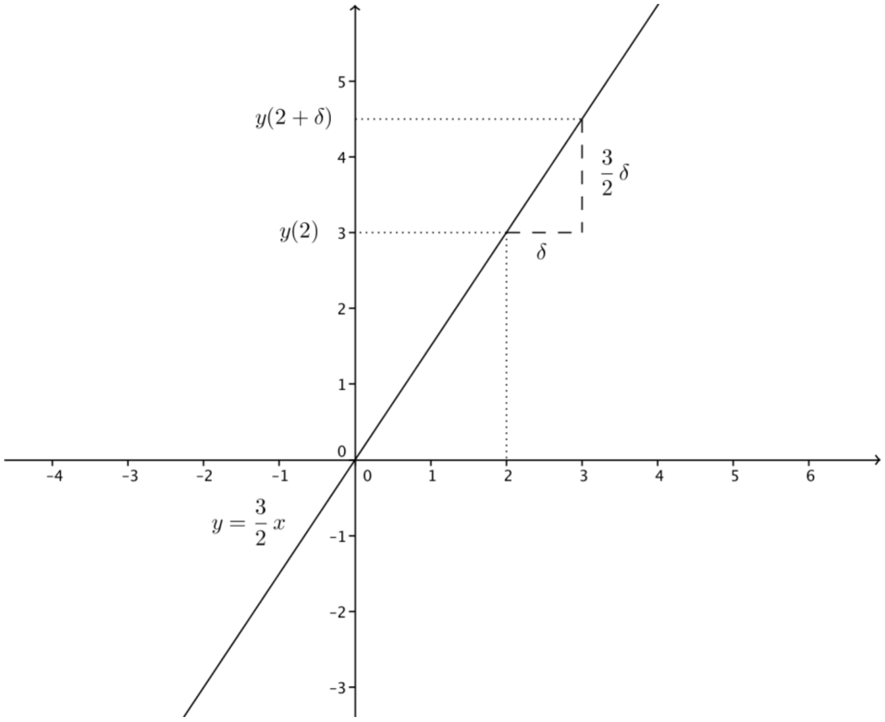
Линейные функции.
Что в них особенного?

Во-первых, с ними очень просто иметь дело.



Линейные функции. Что в них особенного?

Во-вторых, прирост такой функции зависит только от прироста аргумента, и не зависит от того, в какой точке мы ищем прирост
$y(x_0 + \delta) - y(x_0) = ax_0 + a\delta + b - ax_0 - b = a\delta$



Примеры линейных функций

Зависимость пройденного расстояния от времени при равномерном движении

Зависимость масса тела от его объёма

Зависимость длины окружности от радиуса

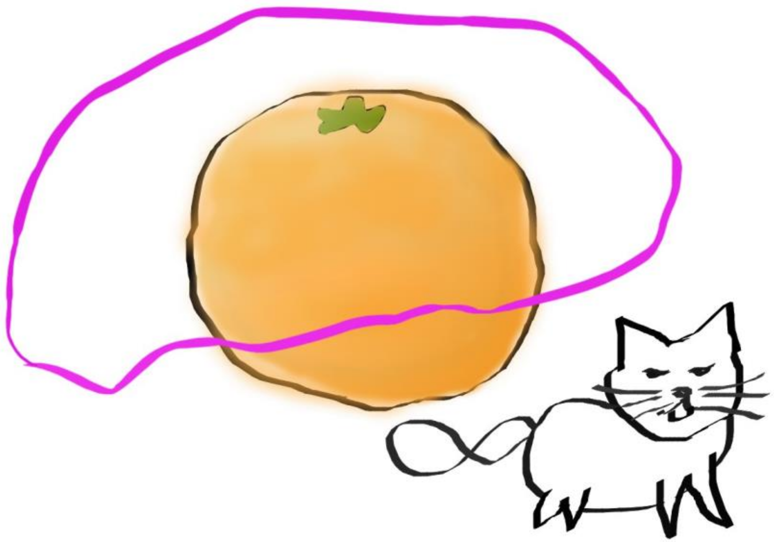
Примеры линейных функций

Обратная функция к линейной тоже является линейной:

$$y = ax + b \Leftrightarrow x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}, \text{при } a \neq 0$$

Неожиданный вопрос

Обмотаем вокруг «экватора» апельсина ленточку, а потом сделаем её на 1 метр длиннее, оставив её окружностью.



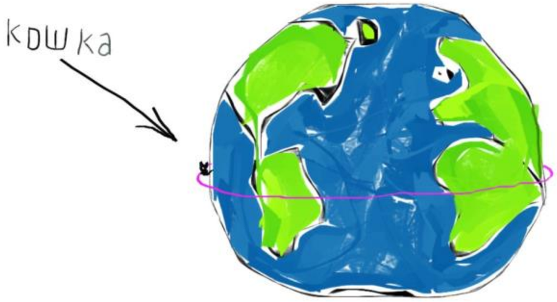
Неожиданный вопрос

Вопрос 1. Пролезет ли сейчас между апельсином и лентой кошка?

Конечно, пролезет. Если, конечно, она не слишком много ест.

Неожиданный вопрос

Теперь представим себе такую картину. Обмотаем ленту вокруг экватора Земли. Потом сделаем её на 1 метр длиннее, оставив её окружностью. Важно, что мы не потянем за ленточку в одном месте, а сделаем так, чтобы расстояние от ленточки до экватора было везде одинаковым.



Неожиданный вопрос

Вопрос 2. Пролезет ли между экватором и ленточкой та же самая кошка?

Неожиданный ответ

Да, пролезет. Если, конечно, это та же кошка, которая пролезала между ленточкой и апельсином.

Это кажется невероятным и даже неверным, но это именно так, и всё дело здесь в свойстве линейных функций.

Неожиданный ответ

Действительно, длина окружности линейно зависит от радиуса:

$$l = 2\pi r$$

Это значит, что и радиус зависит от длины окружности линейно:

$$r = \frac{1}{2\pi} l$$

Прирост функции зависит только от прироста аргумента, больше ни от чего не зависит: $r_1 - r_2 = \frac{1}{2\pi}(l_1 - l_2)$

Неожиданный ответ

В обоих случаях $(l_1 - l_2) = 1$ м, изменение радиуса, то есть просвет между апельсином и лентой и между Землей и лентой будет одинаковым.

Кошка пролезет!

Линейные функции в линейной алгебре

Рассмотрим зависимость объёма V куска мыла от его массы m. Чем характеризуется такая зависимость $V(m)$?

Линейные функции в линейной алгебре

Во сколько раз увеличится масса m куска, во столько раз увеличится и объём:

$$V(\lambda m) = \lambda V(m)$$

Линейные функции в линейной алгебре

Если мы «сложим» два куска вместе, склеим их в один, то масса и объём тоже сложатся:

$$V(m_1 + m_2) = V(m_1) + V(m_2)$$

Линейные функции в линейной алгебре

Эти два свойства и будут определением линейной функции в линейной алгебре, линейной функции в линейном пространстве.

Замечание. «Линейная» функция $y = ax + b$ в этом смысле является линейной только при $b = 0$.

Определение линейной функции

Функция $f(l)$, ставящая в соответствие элементу l линейного пространства L действительное число y, называется линейной, если выполняются следующие условия:

1. Для любых $l_1, l_2 \in L$ верно:

$$f(l_1 + l_2) = f(l_1) + f(l_2)$$

2. Для любого $l \in L$ и любого действительного

числа $\lambda \in \mathbb{R}$ верно:

$$f(\lambda l) = \lambda f(l)$$

Определение линейной функции

Когда мы будем говорить о линейном пространстве над полем комплексных чисел, мы потребуем, чтобы второе свойство выполнялось не только для действительных, но и для комплексных λ.

Примеры линейных функций

Линейное пространство – множество действительных чисел $\mathbb{R}$

Линейная функция – функция, удваивающая число: $f(x) = 2x$

Доказательство линейности:

1. $f(x_1 + x_2) = 2(x_1 + x_2) = 2x_1 + 2x_2 = f(x_1) + f(x_2)$
2. $f(\lambda x) = 2 \cdot \lambda x = \lambda \cdot 2x = \lambda\, f(x)$

Примеры линейных функций

Линейное пространство – множество двумерных векторов $\mathbb{R}^2$

Линейная функция – первая координата вектора

Доказательство линейности следует из правила сложения векторов и умножения на число:

$$(x_1; y_1) + (x_2; y_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$$
$$\lambda(x; y) = (\lambda x; \lambda y)$$

Мы видим, что первые координаты складываются и умножаются на число вместе с векторами:

$$(x_1; y_1) + (x_2; y_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$$
$$\lambda(x; y) = (\lambda x; \lambda y)$$

Примеры линейных функций

Линейное пространство – множество функций, определённых на некотором множестве S

Линейная функция – значение функции в точке x_0

Доказательство линейности следует из определения суммы функций и произведения функции на число:

$$(f+g)(x_0) = f(x_0) + g(x_0)$$
$$(\lambda f)(x_0) = \lambda f(x_0)$$

Примеры нелинейных функций на линейных пространствах

Модуль вещественного числа

$$|1 + (-1)| = 0 \neq |1| + |-1|$$

Длина двумерного вектора

$$l(3; 4) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$l(3; -4) = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

$$(3; 4) + (3; -4) = (6; 0)$$

$$l(6; 0) = \sqrt{6^2 + 0^2} = 6 \neq 5 + 5$$

Важное свойство линейных функций

$f(0) = f(0 \cdot l) = 0 \cdot f(l) = 0$

Здесь l – любой элемент линейного пространства L

Если $f(0) \neq 0$, то функция заведомо не линейная.

Пример. Если $f(x) = 2x + 3$, то $f(x)$ не является линейной функцией.

Отображения линейного пространства

Мы можем рассмотреть функции, значения которых не просто числа, а элементы линейного пространства.

Тождественное отображение

Добавление вектора l

Умножение каждого вектора на число, например на (-1)

Отображения линейного пространства

Функции, значения которых не являются числами, обычно называют отображениями.

Линейные отображения

Мы будем говорить, что отображение $f: L \to M$ из линейного пространства L в линейное пространство M линейно, если оно удовлетворяет следующим условиям

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$

2. $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Здесь x, y, $x+y$, λx – элементы пространства L, а $f(x)$, $f(y)$, $f(x)+f(y)$, $f(x+y)$, $f(\lambda x)$, $\lambda f(x)$ - элементы пространства M.

Примеры линейных отображений

Тождественное отображение $f: L \to L$, $f(l) = l$

Отображение переводит пространство L в себя, при этом образом каждого вектора становится сам вектор. Условия линейности очевидно выполняются.

Примеры линейных отображений

Умножение каждого вектора на число:

$f\colon L \to L,\ f(l) = al$

Отображение переводит пространство L в себя, при этом образом каждого вектора становится вектор, умноженный на число a. Условия линейности выполняются:

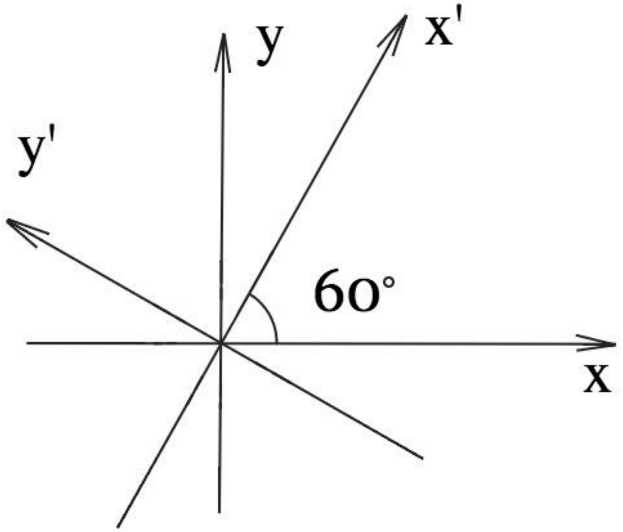
1. $f(l_1 + l_2) = a(l_1 + l_2) = al_1 + al_2$

$= f(l_1) + f(l_2)$

2. $f(\lambda l) = a \cdot \lambda l = \lambda \cdot ax = \lambda f(l)$

Примеры линейных отображений

Поворот плоскости на 60°



Примеры линейных отображений

Пусть L – пространство многочленов степени не выше трёх

M – двумерное векторное пространство

Отображение $f: L \to M$ ставит в соответствие многочлену пару его старших коэффициентов:

$$f(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = (a_3; a_2)$$

Примеры линейных отображений

Свойства линейности выполняются. Сумма переходит в сумму:

$$f(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x$$

Примеры линейных отображений

Произведение на число переходит в произведение на число:

$$f\big(\lambda(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)\big) =$$
$$= f(\lambda a_3x^3 + \lambda a_2x^2 + \lambda a_1x + \lambda a_0) =$$
$$= (\lambda a_3x^3; \lambda a_2x^2) = \lambda(a_3x^3; a_2x^2) =$$
$$= \lambda f(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)$$

Свойства линейных отображений

$$f(0) = 0$$

Действительно,

$$f(0) = f(0l) = 0f(l) = 0,$$

где l – любой вектор

Свойства линейных отображений

$$f(-l) = -f(l)$$

Действительно,

$$f(-l) = f(-1 \cdot l) = (-1)f(l) = -f(l)$$

Свойства линейных отображений

Выражение вида $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$, где $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ — некоторые числа, а $x_1, x_2, \cdots, x_n$ — векторы, мы будем называть линейной комбинацией векторов $x_1, x_2, \cdots, x_n$

При линейном отображении линейная комбинация векторов переходит в линейную комбинацию:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$$