**Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2014—15 уч. год.**
**Линейная алгебра**
**Домашнее задание №2**
**Фамилия и имя студента: Агамалов Вячеслав**

Напоминаем, что куда лучше вообще не сдавать задание или сдать частично сделанное задание, чем сдать хотя бы частично списанный текст.

**Задача 1.** Найти образ и ядро отображения, заданного матрицей

a. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 4 \\ -12 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

b. $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 11 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

c. $C = \begin{pmatrix} -6 & 0 & -7 \\ 6 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

**Задача 2.** Пусть оператор $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ задаётся в стандартном базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} -11 & -4 \\ 20 & 7 \end{pmatrix}$.

a. Найдите такие числа $\lambda$, что $\det(A - \lambda E) = 0$.
b. Рассмотрим *тождественный оператор* id, который каждый вектор переводит в себя (то есть $\mathrm{id}\, v = v$ для любого вектора $v$). Записать матрицу оператора id в стандартном базисе.
c. Запишите в стандартном базисе матрицу линейного оператора $(f - \lambda \cdot \mathrm{id})$.
d. Найдите такие числа $\lambda$, что оператор $(f - \lambda \cdot \mathrm{id})$ имеет нетривиальное ядро.
e. Для каждого $\lambda$ из пункта d найдите ядро оператора $(f - \lambda \cdot \mathrm{id})$.
*Подсказка*: нетривиальное ядро ненулевого оператора на двумерном пространстве может быть только одномерным (если бы оно было двумерным, оператор был бы нулевым), то есть его можно представить как множество векторов вида $cv$, где $c$ — любое число, $v$ — некоторый ненулевой вектор. Его-то и нужно найти.
f. Выберите по ненулевому вектору из каждого подпространства, описанного в пункте e. Образуют ли эти векторы базис $\mathbb{R}^2$. Если да, то как выглядит оператор $f$ в этом базисе?
g. Представьте матрицу $A$ в виде $A = CBC^{-1}$, где $C$ — некоторая матрица, $B$ — диагональная матрица. Объясните, что записано по столбцам матриц $C$ и $C^{-1}$.
h. Пусть $K = LML^{-1}$, где $K$, $L$, $M$ — квадратные матрицы. Выразите матрицу $K^n$ через матрицы $M^n$, $L$, $L^{-1}$.
i. Найдите матрицу $A^n$, $n$ — любое натуральное число.

**Задача 3.** Пусть оператор $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ задаётся в стандартном базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} -3 & -16 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

a. Найдите такое число $\lambda$, что $\det(A - \lambda E) = 0$. Докажите, что оно единственное.
b. Найдите такое число $\lambda$, что оператор $(f-\lambda\cdot\mathrm{id})$, где id — тождественный оператор из задачи 2, имеет нетривиальное ядро. Докажите, что оно единственное.
c. Найдите ядро и образ отображения $(f - \lambda \cdot \mathrm{id})$.
d. Найдите какой-нибудь ненулевой вектор $v$, не лежащий в ядре отображения $(f - \lambda \cdot \mathrm{id})$. Найдите $w = (f - \lambda \cdot \mathrm{id})v$. Докажите, что векторы $v$, $w$ образуют базис в $\mathbb{R}^2$.
e. Запишите матрицу оператора $f$ в базисе $(v, w)$.
f. Представьте матрицу $A$ в виде $A = CBC^{-1}$ , где $C$ — некоторая невырожденная матрица, а $B$ — жорданова матрица. Объясните, что записано по столбцам матриц $C$ и $C^{-1}$.

g. Найдите матрицу $A^n$, где $n$ — любое натуральное число.

**Задача 4.** a. Найдите площадь параллелограмма, порождённого векторами $(4, 3)$ и $(3, 3)$.

b. Найдите объем параллелепипеда, порождённого векторами $(5, 3, 5)$, $(1, 2, 2)$ и $(3, 5, 2)$.

**Задача 5.** a. Найдите размерность линейной оболочки векторов $(-20, -21, -6, -17)$, $(56, 50, 19, 52)$, $(80, 76, 26, 72)$, $(96, 88, 32, 88)$, $(76, 71, 25, 69)$

b. Выберите из этого набора векторы, составляющие базис линейной оболочки данного набора.

c. Дополните этот базис до базиса $\mathbb{R}^4$.

d. Найдите какое-нибудь прямое дополнение линейной оболочки данного набора.
*Замечание:* Прямым дополнением подпространства $L$ пространства $V$ называется такое подпространство $M$ пространства $V$, что $V = L \oplus M$.