Цепи Маркова, часть 2

Теория вероятностей, математический факультет НИУ ВШЭ

19 и 20 ноября 2013

Задача 1. Пусть $\Pi = (p_{ij})$ — марковская матрица, то есть матрица марковского процесса. Докажите, что отображение $x \mapsto x\Pi$ переводит стандартный единичный симплекс $p_i \geq 0, \sum p_i = 1$ в себя.

Задача 2. Докажите, что для любой марковской матрицы существует стационарное распределение вероятностей.

Задача 3. Приведите пример марковской матрицы, для которой существует два разных стационарных распределения вероятностей.

Задача 4. Докажите, что спектри марковской матрицы лежит в замкнутом единичном круге.

Оставшаяся часть листка посвящена исследованию сходимости последовательности $\Pi^n p$.

Важную роль будет играть ориентированный граф Γ, вершины которого — состояния марковского процесса, и ребро (i, j) проведено, если $p_{ij} > 0$.

Задача 5. Пусть граф Γ не является слабо связным, то есть множество вершин разбивается на два класса A и B, таких что нет ни рёбер из A в B, ни рёбер из B в A. Сведите исследование сходимости для нашей марковской цепи к исследованию её ограничений на A и B.

Задача 6. Пусть граф Γ слабо связен, но не сильно связен, то есть множество вершин разбивается на два класса A и B, таких что есть рёбра из A в B, но не из B в A. Докажите, что для любого начального распределения вероятностей p_i вероятность события $\xi_n \in B$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

Задача 7. Пусть граф Γ полный.

a. Докажите, что стационарное распределение единственно.

b. Докажите, что для любого начального распределения вероятностей p последовательность векторов $\Pi^n p$ сходится по Чезаро.

c. (*) Докажите, что для любого начального распределения вероятностей p последовательность векторов $\Pi^n p$ сходится.

Задача 8. Пусть граф Γ сильно связен.

a. Обязательно ли последовательность $\Pi^n x$ сходится?

b. Докажите, что стационарное распределение единственно.

c. Докажите, что для любого начального распределения вероятностей p последовательность векторов $\Pi^n p$ сходится по Чезаро.

d. Пусть НОД длин всех циклов в графе равен 1. Докажите, что для некоторого n все элементы матрицы Π^n строго положительны.

e. В условиях предыдущего пункта докажите, что последовательность $x\Pi^n$ сходится к стационарному распределению.

Задача 9. В условиях п. d рассмотрим последовательность случайных величин $\eta_n = 1$, если $\xi_n = a$ и $\eta_n = 0$ иначе. Найдите асимптотику $\mathrm{E}\,\eta_n$, $\mathrm{D}\,\eta_n$, а также коэффициента корреляции между η_i и η_j при $|i - j| \to \infty$. Используя эти оценки и задачу 2.9 из домашнего задания, докажите, что для марковских цепей выполнен закон больших чисел.