ФИО, группа: ____.

Правила

Во всех задачах требуется приводить решение и ответ. Задача без решения не засчитывается. Задача без ответа не засчитывается. Можно использовать собственноручно изготовленный лист формата А4, на котором можно записать что угодно.

Строго запрещено:

- переговариваться (с любой целью),
- пользоваться устройствами связи (с любой целью — например, в качестве калькулятора).
- списывать (за исключением использования листа А4).

Нарушение любого из этих пунктов влечет удаление с зачётной работы.

Желаем удачи!

Задача 1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -2xy + 5x + 3y^2 - 24y + 42 \\ \dot{y} = -2x + y^2 - 5y \end{cases}$$

Найти уравнение фазовой кривой, проходящей через точку

a. (5 баллов) $(-3, 3)$.

b. (10 баллов) $(0, 0)$.

Ответ: | |
|---|

Задача 2. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = -c + x^2 + 6x.$$

При каких значениях параметра c

a. (10 баллов) существует непостоянное решение $x = \varphi(t)$, такое, что существуют различные конечные пределы

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) \text{ и } \lim_{t\to-\infty} \varphi(t)$$

Ответ:

b. (10 баллов) существует такая особая точка x_*, что существует два различных непостоянных решения $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, обладающих свойством

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi_1(t) = \lim_{t\to-\infty} \varphi_2(t) = x_*.$$

Ответ:

Задача 3. (20 баллов) Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = 16y, \quad \dot{y} = -4x$$

Найти такой первый интеграл $H(x, y)$, что $H(x, 0) = x + 2$ при $x \geq 0$.

Ответ:

Задача 4. Рассмотрим систему уравнений. (Hint! Посмотрите внимательно: это *другая* система уравнений, не такая, как была на мидтерме.)

$$\begin{cases} \dot{x} = (y+3)^2 \\ \dot{y} = (x-2)^2 \end{cases}$$

a. (10 баллов) Записать уравнения всех фазовых кривых в виде зависимости y от x или x от y (допускается задание кривой в неявной форме: в виде уравнения, связывающего x и y).

Ответ:

b. (15 баллов) Найти все начальные условия (x_0, y_0) для которых решение $(x(t), y(t))$ соответствующей задачи Коши определено для сколь угодно больших значений t и стремится к точке $(2, -3)$, то есть

$$\lim_{t \to +\infty} (x(t), y(t)) = (2, -3).$$

Ответ:

Задача 5. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} = (x-3)(x+2)(\alpha x - 4).$$

a. (10 баллов) Найти первый интеграл при $\alpha = -1$.
b. (15 баллов) Построить фазовый портрет уравнения в координатах $(x, \dot{x})$ при $\alpha = -1$. Отметить на нём:
   - все особые точки
   - как минимум одну траекторию, соответствующую непостоянному периодическому решению
   - все траектории, стремящиеся к какой-либо особой точке в прямом или обратном времени (при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$ соответственно)
   - как минимум одну траекторию, соответствующую решению, которое не является постоянным, периодическим и не имеет конечного предела ни в прямом, ни в обратном времени.
c. (15 баллов) Найти все значения параметра α, при которых все решения уравнения являются ограниченными.

Ответ: