Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2013—14 уч. год
Дифференциальные уравнения
Домашнее задание №2: Первые интегралы, однородные уравнения и все-все-все
И. А. Хованская, И. В. Щуров, П. Ф. Соломатин, А. Петрин, Н. Солодовников
Фамилия и имя студента: Темникова Мария Владимировна

Напоминаем вам, что куда лучше вообще не сдавать задание или сдать частично сделанное задание, чем сдать хотя бы частично списанный текст.

Задача 1. Рассмотрим уравнение: $\dot{x} = \frac{4}{3}\frac{x}{t}$.
a. Найти общий вид решений.
b. Выразить явно решения со следующими начальными условиями. Указать область определения каждого решения. Построить соответствующие интегральные кривые.

- $x(1) = 1$,
- $x(-1) = 1$,
- $x(1) = 0$,
- $x(1) = -1$,
- $x(-1) = -1$,
- $x(-1) = 0$

Задача 2. Рассмотрим уравнение: $\dot{x} = -\frac{1}{4}\frac{x}{t}$.
a. Найти общий вид решений.
b. Выразить явно решения со следующими начальными условиями. Указать область определения каждого решения. Построить соответствующие интегральные кривые.

- $x(1) = 1$,
- $x(-1) = 1$,
- $x(1) = 0$,
- $x(1) = -1$,
- $x(-1) = -1$,
- $x(-1) = 0$

Задача 3. Рассмотрим уравнение: $\dot{x} = \frac{1}{2}\frac{t}{x}$.
a. Найти общий вид решений.
b. Выразить явно решения со следующими начальными условиями. Указать область определения каждого решения. Построить соответствующие интегральные кривые.

- $x(0) = 2$,
- $x(0) = -1$

Задача 4. Рассмотрим уравнение: $\dot{x} = -\frac{1}{2}\frac{t}{x}$.
a. Найти общий вид решений.
b. Выразить явно решения со следующими начальными условиями. Указать область определения каждого решения. Построить соответствующие интегральные кривые.

- $x(0) = 2$,
- $x(0) = -1$

Задача 5. [1] Простейшая, самая грубая модель, описывающая борьбу двух видов — хищника и жертвы — состоит в следующем. Рассмотрим пруд, в котором живут рыбы двух видов — скажем, караси и щуки. Если бы щук не было, караси размножались бы экспоненциально, со скоростью $\dot{x} = kx$, пропорциональной их количеству x (мы предполагаем, что суммарная масса карасей много меньше массы пруда). Если y — количество щук, то следует учесть карасей, съеденных щуками. Мы предположим, что число встреч карасей со щуками пропорционально как числу карасей, так и числу щук: тогда для скорости изменения числа карасей получим уравнение $\dot{x} = kx - axy$.

Что касается щук, то без карасей они вымирают: $\dot{y} = -ly$, в присутствии же карасей начинают размножаться со скоростью, пропорциональной числу съеденных карасей: $\dot{y} = -ly + bxy$.

Мы приходим, таким образомб к системе дифференциальных уравнений простейшей модели системы хищник-жертва (*модели Лотки—Вольтерра*):

$$\begin{cases} \dot{x} = kx - axy, \\ \dot{y} = -ly + bxy. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь a, b, k, l — положительные параметры, фазовым пространством является первая четверть $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Пусть $a = 3$, $b = 2$, $k = 4$ и $l = 4$.

a. Найти все точки фазового пространства, в которых правая часть равна нулю (*особые точки*).
b. Нарисовать векторное поле (1). Отметить кривые (изоклины), на которых векторы векторного поля направлены горизонтально и вертикально.
c. Найти и нарисовать ещё одну изоклину, являющуюся прямой (не вертикальной и не горизонтальной).
d. Записать неавтономное дифференциальное уравнение, интегральные кривые которого совпадают с фазовыми кривыми системы (1).
e. Решить полученное уравнение.
f. Найти первый интеграл $H(x, y)$ для системы (1).
g. Найти все точки минимума $H(x, y)$.
h. Пусть одна из точек минимума, найденных в предыдущем пункте, имеет координаты (x_0, y_0). Нарисовать графики функций $f(x) = H(x, y_0)$ и $g(y) = H(x_0, y)$.
i. Нарисовать примерно несколько фазовых кривых системы (1). Нарисовать все фазовые кривые, соответствующие постоянным решениям (положения равновесия, они же особые точки).
j. Существуют ли периодические решения уравнения (1)?
k. Существуют ли решения, не являющиеся периодическими?
l. Существуют ли неограниченные решения (то есть решения, траекторию которых нельзя поместить ни в какой круг на фазовом пространстве)?

Определение 1. Функция $F(x, y)$ называется *однородной*, если $F(\lambda x, \lambda y) = F(x, y)$ для любых x, y. Уравнение $y' = F(x, y)$ называется *однородным*, если в правой части стоит однородная функция.

Задача 6. Рассмотрим уравнение

$$y' = \frac{x^3 - 5x^2y + 4xy^2 + 9y^3}{-5x^3 + 4x^2y + 9xy^2} \tag{2}$$

a. Нарисовать три различные изоклины для уравнения (2).
b. Показать, что уравнение является однородным.
c. Нарисовать эскиз поля направлений для этого уравнения.
d. Рассмотрим замену $z = y/x$. Во какие кривые перейдут изоклины, найденные в пункте a, в координатах (z, x)? Нарисуйте их.
e. Запишите дифференциальное уравнение на новую неизвестную функцию z.
f. Решите уравнение (2).

Замечание 2. Аналогичным образом (с помощью замены $z = y/x$) можно любое однородное уравнение свести к уравнению с разделяющимися переменными.

Задача 7. Найдите уравнение фазовых кривых (для систем автономных уравнений) или уравнение интегральных кривых (для неавтономных уравнений). Допускается неявное задание кривых.

a. $y' = y\left(9x^2 + \sin(x)\right) + \left(-15x^4 + \cos(x)\right) e^{3x^3 - \cos(x)}$

b. $y' = \dfrac{x^3 + 2x^2 y + 6xy^2 + 9y^3}{2x^3 + 6x^2 y + 9xy^2}$

c. $\begin{cases} \dot{x} = -3x^3 + 6x^2 y - 15xy^2 \\ \dot{y} = x^3 - 3x^2 y + 6xy^2 - 15y^3 \end{cases}$

d. $\begin{cases} \dot{x} = 3y^2\left(y^3 \cos\left(x^4 + y^3\right) + \sin\left(x^4 + y^3\right)\right) \\ \dot{y} = -4x^3 y^3 \cos\left(x^4 + y^3\right) \end{cases}$

e. $dx\,(5x^4 e^{y^3} \cos\left(x^5\right)) + dy\,(3y^2 e^{y^3} \sin\left(x^5\right)) = 0$

Список литературы

[1] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. — 368 с.

 Фамилия и имя студента: Темникова Мария Владимировна