

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2013—14 уч. год

Дифференциальные уравнения

Домашнее задание №2: Первые интегралы, однородные уравнения и все-все-все

И. А. Хованская, И. В. Щуров, П. Ф. Соломатин, А. Петрин, Н. Солодовников

Фамилия и имя студента: Султанов Ильдар Гумарович

Напоминаем вам, что куда лучше вообще не сдавать задание или сдать частично сделанное задание, чем сдать хотя бы частично списанный текст.

**Задача 1.** Рассмотрим уравнение:  $\dot{x} = \frac{1}{2} \frac{x}{t}$ .

а. Найти общий вид решений.

б. Выразить явно решения со следующими начальными условиями. Указать область определения каждого решения. Построить соответствующие интегральные кривые.

- $x(1) = 1,$
- $x(-1) = 1,$
- $x(1) = 0,$
- $x(1) = -1,$
- $x(-1) = -1,$
- $x(-1) = 0$

**Задача 2.** Рассмотрим уравнение:  $\dot{x} = -4 \frac{x}{t}$ .

а. Найти общий вид решений.

б. Выразить явно решения со следующими начальными условиями. Указать область определения каждого решения. Построить соответствующие интегральные кривые.

- $x(1) = 1,$
- $x(-1) = 1,$
- $x(1) = 0,$
- $x(1) = -1,$
- $x(-1) = -1,$
- $x(-1) = 0$

**Задача 3.** Рассмотрим уравнение:  $\dot{x} = \frac{5}{4} \frac{t}{x}$ .

а. Найти общий вид решений.

б. Выразить явно решения со следующими начальными условиями. Указать область определения каждого решения. Построить соответствующие интегральные кривые.

- $x(0) = 2,$
- $x(0) = -1$

**Задача 4.** Рассмотрим уравнение:  $\dot{x} = -\frac{1}{2} \frac{t}{x}$ .

а. Найти общий вид решений.

б. Выразить явно решения со следующими начальными условиями. Указать область определения каждого решения. Построить соответствующие интегральные кривые.

- $x(0) = 2,$
- $x(0) = -1$

**Задача 5.** [1] Простейшая, самая грубая модель, описывающая борьбу двух видов — хищника и жертвы — состоит в следующем. Рассмотрим пруд, в котором живут рыбы двух видов — скажем, караси и щуки. Если бы щук не было, караси размножались бы экспоненциально, со скоростью  $\dot{x} = kx$ , пропорциональной их количеству  $x$  (мы предполагаем, что суммарная масса карасей много меньше массы пруда). Если  $y$  — количество щук, то следует учесть карасей, съеденных щуками. Мы предположим, что число встреч карасей со щуками пропорционально как числу

карасей, так и числу щук: тогда для скорости изменения числа карасей получим уравнение  $\dot{x} = kx - axy$ .

Что касается щук, то без карасей они вымирают:  $\dot{y} = -ly$ , в присутствии же карасей начинают размножаться со скоростью, пропорциональной числу съеденных карасей:  $\dot{y} = -ly + bxy$ .

Мы приходим, таким образом к системе дифференциальных уравнений простейшей модели системы хищник-жертва (*модели Лотки–Вольтерра*):

$$\begin{cases} \dot{x} = kx - axy, \\ \dot{y} = -ly + bxy. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $a, b, k, l$  — положительные параметры, фазовым пространством является первая четверть  $x \geq 0, y \geq 0$ .

Пусть  $a = 1, b = 4, k = 1$  и  $l = 4$ .

- Найти все точки фазового пространства, в которых правая часть равна нулю (*особые точки*).
- Нарисовать векторное поле (1). Отметить кривые (изоклины), на которых векторы векторного поля направлены горизонтально и вертикально.
- Найти и нарисовать ещё одну изоклину, являющуюся прямой (не вертикальной и не горизонтальной).
- Записать неавтономное дифференциальное уравнение, интегральные кривые которого совпадают с фазовыми кривыми системы (1).
- Решить полученное уравнение.
- Найти первый интеграл  $H(x, y)$  для системы (1).
- Найти все точки минимума  $H(x, y)$ .
- Пусть одна из точек минимума, найденных в предыдущем пункте, имеет координаты  $(x_0, y_0)$ . Нарисовать графики функций  $f(x) = H(x, y_0)$  и  $g(y) = H(x_0, y)$ .
- Нарисовать примерно несколько фазовых кривых системы (1). Нарисовать все фазовые кривые, соответствующие постоянным решениям (положения равновесия, они же особые точки).
- Существуют ли периодические решения уравнения (1)?
- Существуют ли решения, не являющиеся периодическими?
- Существуют ли неограниченные решения (то есть решения, траекторию которых нельзя поместить ни в какой круг на фазовом пространстве)?

**Определение 1.** Функция  $F(x, y)$  называется *однородной*, если  $F(\lambda x, \lambda y) = F(x, y)$  для любых  $x, y$ . Уравнение  $y' = F(x, y)$  называется *однородным*, если в правой части стоит однородная функция.

**Задача 6.** Рассмотрим уравнение

$$y' = \frac{x^3 + 3x^2y + 2xy^2 + 9y^3}{3x^3 + 2x^2y + 9xy^2} \quad (2)$$

- Нарисовать три различные изоклины для уравнения (2).
- Показать, что уравнение является однородным.
- Нарисовать эскиз поля направлений для этого уравнения.
- Рассмотрим замену  $z = y/x$ . Во какие кривые перейдут изоклины, найденные в пункте а, в координатах  $(z, x)$ ? Нарисуйте их.
- Запишите дифференциальное уравнение на новую неизвестную функцию  $z$ .
- Решите уравнение (2).

**Замечание 2.** Аналогичным образом (с помощью замены  $z = y/x$ ) можно любое однородное уравнение свести к уравнению с разделяющимися переменными.

**Задача 7.** Найдите уравнение фазовых кривых (для систем автономных уравнений) или уравнение интегральных кривых (для неавтономных уравнений). Допускается неявное задание кривых.

a. 
$$\begin{cases} \dot{x} = -2x^3 - 2x^2y + 9xy^2 \\ \dot{y} = x^3 - 2x^2y - 2xy^2 + 9y^3 \end{cases}$$

b. 
$$y' = y(-20x^3 + \cos(x)) + (-12x^3 + \sin(x))e^{-5x^4 + \sin(x)}$$

c. 
$$dx(-4x^3 \sin(x^4) \cos(y^2)) + dy(-2y \sin(y^2) \cos(x^4)) = 0$$

d. 
$$-dx(x^3 + 3x^2y - 10xy^2 + 12y^3) + dy(3x^3 - 10x^2y + 12xy^2) = 0$$

e. 
$$\begin{cases} \dot{x} = -3x^5y^2 \sin(x^4 + y^3) \\ \dot{y} = -x^4(-4x^4 \sin(x^4 + y^3) + 5 \cos(x^4 + y^3)) \end{cases}$$

## Список литературы

- [1] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. — 368 с.