

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2013—14 уч. год

Дифференциальные уравнения

Домашнее задание №2: Первые интегралы, однородные уравнения и все-все-все

И. А. Хованская, И. В. Щуров, П. Ф. Соломатин, А. Петрин, Н. Солодовников

Фамилия и имя студента: Архипова Ирина Андреевна

Напоминаем вам, что куда лучше вообще не сдавать задание или сдать частично сделанное задание, чем сдать хотя бы частично списанный текст.

Задача 1. Рассмотрим уравнение: $\dot{x} = 2\frac{x}{t}$.

а. Найти общий вид решений.

б. Выразить явно решения со следующими начальными условиями. Указать область определения каждого решения. Построить соответствующие интегральные кривые.

- $x(1) = 1$,
- $x(-1) = 1$,
- $x(1) = 0$,
- $x(1) = -1$,
- $x(-1) = -1$,
- $x(-1) = 0$

Задача 2. Рассмотрим уравнение: $\dot{x} = -5\frac{x}{t}$.

а. Найти общий вид решений.

б. Выразить явно решения со следующими начальными условиями. Указать область определения каждого решения. Построить соответствующие интегральные кривые.

- $x(1) = 1$,
- $x(-1) = 1$,
- $x(1) = 0$,
- $x(1) = -1$,
- $x(-1) = -1$,
- $x(-1) = 0$

Задача 3. Рассмотрим уравнение: $\dot{x} = \frac{1}{4}\frac{t}{x}$.

а. Найти общий вид решений.

б. Выразить явно решения со следующими начальными условиями. Указать область определения каждого решения. Построить соответствующие интегральные кривые.

- $x(0) = 2$,
- $x(0) = -1$

Задача 4. Рассмотрим уравнение: $\dot{x} = -\frac{3}{2}\frac{t}{x}$.

а. Найти общий вид решений.

б. Выразить явно решения со следующими начальными условиями. Указать область определения каждого решения. Построить соответствующие интегральные кривые.

- $x(0) = 2$,
- $x(0) = -1$

Задача 5. [1] Простейшая, самая грубая модель, описывающая борьбу двух видов — хищника и жертвы — состоит в следующем. Рассмотрим пруд, в котором живут рыбы двух видов — скажем, караси и щуки. Если бы щук не было, караси размножились бы экспоненциально, со скоростью $\dot{x} = kx$, пропорциональной их количеству x (мы предполагаем, что суммарная масса карасей много меньше массы пруда). Если y — количество щук, то следует учесть карасей, съеденных щуками. Мы предположим, что число встреч карасей со щуками пропорционально как числу карасей, так и числу щук: тогда для скорости изменения числа карасей получим уравнение $\dot{x} = kx - axy$.

Что касается щук, то без карасей они вымирают: $\dot{y} = -ly$, в присутствии же карасей начинают размножаться со скоростью, пропорциональной числу съеденных карасей: $\dot{y} = -ly + bxy$.

Мы приходим, таким образом к системе дифференциальных уравнений простейшей модели системы хищник-жертва (*модели Лотки–Вольтерра*):

$$\begin{cases} \dot{x} = kx - axy, \\ \dot{y} = -ly + bxy. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь a, b, k, l — положительные параметры, фазовым пространством является первая четверть $x \geq 0, y \geq 0$.

Пусть $a = 4, b = 4, k = 2$ и $l = 2$.

- Найти все точки фазового пространства, в которых правая часть равна нулю (*особые точки*).
- Нарисовать векторное поле (1). Отметить кривые (изоклины), на которых векторы векторного поля направлены горизонтально и вертикально.
- Найти и нарисовать ещё одну изоклину, являющуюся прямой (не вертикальной и не горизонтальной).
- Записать неавтономное дифференциальное уравнение, интегральные кривые которого совпадают с фазовыми кривыми системы (1).
- Решить полученное уравнение.
- Найти первый интеграл $H(x, y)$ для системы (1).
- Найти все точки минимума $H(x, y)$.
- Пусть одна из точек минимума, найденных в предыдущем пункте, имеет координаты (x_0, y_0) . Нарисовать графики функций $f(x) = H(x, y_0)$ и $g(y) = H(x_0, y)$.
- Нарисовать примерно несколько фазовых кривых системы (1). Нарисовать все фазовые кривые, соответствующие постоянным решениям (положения равновесия, они же особые точки).
- Существуют ли периодические решения уравнения (1)?
- Существуют ли решения, не являющиеся периодическими?
- Существуют ли неограниченные решения (то есть решения, траекторию которых нельзя поместить ни в какой круг на фазовом пространстве)?

Определение 1. Функция $F(x, y)$ называется *однородной*, если $F(\lambda x, \lambda y) = F(x, y)$ для любых x, y . Уравнение $y' = F(x, y)$ называется *однородным*, если в правой части стоит однородная функция.

Задача 6. Рассмотрим уравнение

$$y' = \frac{x^3 - 4x^2y + 4xy^2 - 12y^3}{-4x^3 + 4x^2y - 12xy^2} \quad (2)$$

- Нарисовать три различные изоклины для уравнения (2).
- Показать, что уравнение является однородным.
- Нарисовать эскиз поля направлений для этого уравнения.
- Рассмотрим замену $z = y/x$. Во какие кривые перейдут изоклины, найденные в пункте а, в координатах (z, x) ? Нарисуйте их.
- Запишите дифференциальное уравнение на новую неизвестную функцию z .
- Решите уравнение (2).

Замечание 2. Аналогичным образом (с помощью замены $z = y/x$) можно любое однородное уравнение свести к уравнению с разделяющимися переменными.

Задача 7. Найдите уравнение фазовых кривых (для систем автономных уравнений) или уравнение интегральных кривых (для неавтономных уравнений). Допускается неявное задание кривых.

a.
$$\begin{cases} \dot{x} = -4x^3 - 4x^2y + 12xy^2 \\ \dot{y} = x^3 - 4x^2y - 4xy^2 + 12y^3 \end{cases}$$

b. $y' = y (16x^3 + \sin(x)) + (5x^4 + e^x) e^{4x^4 - \cos(x)}$

c. $dx (x^4 (-3x^3 \sin(x^3 + y^5) + 5 \cos(x^3 + y^5))) + dy (-5x^5 y^4 \sin(x^3 + y^5)) = 0$

d.
$$\begin{cases} \dot{x} = -5y^4 \sin(x^5) \sin(y^5) \\ \dot{y} = -5x^4 \cos(x^5) \cos(y^5) \end{cases}$$

e. $-dx (x^3 + 4x^2y + 2xy^2 + 6y^3) + dy (4x^3 + 2x^2y + 6xy^2) = 0$

Список литературы

- [1] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. — 368 с.