

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2013—14 уч. год.

Математический анализ — 2

Домашнее задание №1. Прямые и плоскости

Ю. Г. Кудряшов, Н. Б. Гончарук, К. Г. Куломжиян, А. М. Малокостов, Н. Карпиков

Фамилия и имя студента: Смык Екатерина

Напоминаем, что куда лучше вообще не сдавать задание или сдать частично сделанное задание, чем сдать хотя бы частично списанный текст. Также напоминаем о необходимости **подробно** записывать решения. Например, ссылки на «формулу с лекции» в этом ДЗ **недостаточно**.

Задача 1. Рассмотрим прямую l , заданную уравнением $5x - 3y - 7 = 0$, и точку $A(3, 7)$.

- Найдите вектор нормали \vec{n} к прямой l и какой-нибудь вектор, параллельный прямой l .
- Найдите на прямой l точку B , такую что $AB \perp l$.
- Найдите $|AB|$.
- Выберите на прямой l произвольную точку C и найдите $\langle \overrightarrow{CA}, \vec{n} \rangle$.
- Докажите, что скалярное произведение $\langle \overrightarrow{CA}, \vec{n} \rangle$ не зависит от выбора точки $C \in l$.
- Докажите, что расстояние от точки A до прямой l равно $\frac{\langle \overrightarrow{CA}, \vec{n} \rangle}{|\vec{n}|}$, и найдите эту величину.

Задача 2. Рассмотрим в трёхмерном пространстве параллельные плоскости, заданные уравнениями $-2x + 9y + 7z + 1 = 0$ и $-2x + 9y + 7z + 8 = 0$.

- Найдите вектор \vec{n} , перпендикулярный этим плоскостям.
- Пусть A — произвольная точка на первой плоскости, B — на второй. Докажите, что скалярное произведение $\langle \overrightarrow{AB}, \vec{n} \rangle$ не зависит от выбора точек A и B , и найдите его.
- Докажите, что расстояние между плоскостями равно $\frac{\langle \overrightarrow{AB}, \vec{n} \rangle}{|\vec{n}|}$, и найдите его.

Задача 3. а. Решите систему уравнений.

$$\begin{aligned}9x - 3y - 5z - 7 &= 0; \\ -6x - 4y + 3z - 8 &= 0.\end{aligned}$$

- Напишите в параметрическом виде уравнение прямой пересечения плоскостей $9x - 3y - 5z - 7 = 0$ и $-6x - 4y + 3z - 8 = 0$.
- Найдите векторное произведение векторов нормали к плоскостям из предыдущего пункта, и убедитесь, что оно параллельно прямой пересечения плоскостей.

Задача 4. Рассмотрим параллелепипед $ABCD A' B' C' D'$. Известны координаты трёх его вершин: $A(0, 0, 0)$, $B(8, 9, 1)$, $D(3, -3, 3)$, координаты вершины $A'(x', y', z')$ считаются свободными переменными.

- Найдите координаты остальных вершин параллелепипеда.
- Найдите объём этого параллелепипеда. *Указание:* воспользуйтесь геометрическим смыслом определителя.
- Пусть $v = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$ — векторное произведение векторов AB и AD , определяемое как вектор коэффициентов при x' , y' , z' в ответе к предыдущему пункту. Убедитесь, что объём параллелепипеда $ABCD A' B' C' D'$ равен

$$\text{Vol}(ABCD A' B' C' D') = \langle v, \overrightarrow{AA'} \rangle = \langle \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'} \rangle.$$

- Докажите, что вектор v перпендикулярен плоскости $ABCD$.
- Докажите, что длина вектора v равна площади параллелограмма $ABCD$.