

ДЗ№2

Аралкина Мария Андреевна

Задача 1. Одним из самых часто встречающихся неправильных решений задачи 6 из первого домашнего задания было такое: «Если Боря увидит, что после его хода получится периодическая десятичная дробь, то он поставит такое число, чтобы избежать периода». В этом рассуждении есть несколько ошибок.

1. Предположим, что Боря послушался этого совета и сделал «правильный» ход. Означает ли это, что Аня уже не сможет выиграть?
2. Докажите, что может случиться так, что какую бы цифру $n \in \{0, 1, \dots, 9\}$ ни написал Боря, будет получаться число, состоящее из $k(n)$ -кратного ($k(n) \geq 2$) приставления друг к другу некоторого числа $m(n)$.

Задача 2. Найдите предел следующих последовательностей или докажите, что его не существует:

1. $c_n = \frac{1}{n \sin n}$;
2. $e_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$;
3. $h_n = \frac{C_n^k}{C_n^{n-k}}$, где k — некоторое фиксированное число.

Задача 3. Какие из следующих утверждений верны, а какие — нет? Объясните ответ.

1. Если в любой окрестности точки a лежит бесконечно много членов последовательности a_n , то последовательность a_n сходится к a ;
2. Если последовательность a_n сходится к a , а последовательность b_n сходится к b , причем $a > b$, то существует такое N , что для всех $n \geq N$ выполняется неравенство $a_n > b_n$.
3. Если в определении предела последовательности заменить начало «Для любого положительного ε найдется номер N , такой, что...» на «Для некоторого положительного ε и для любого номера N , такого, что...», то получится определение того, что последовательность a_n не сходится к a ;

Задача 4. Известно, что $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right)$ при $n \geq 1$. Найдите предел последовательности a_n .

Задача 5. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве (c, ∞) . Пусть известно, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -10$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 6$$

Что можно сказать про $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$? Утверждение должно быть доказано со всеми ε и δ .

Задача 6. ... Футбол в Лужниках закончился поздно. Боря собрался проводить Аню до ее дома рядом с Парком культуры. Сидя на остановке в ожидании последнего троллейбуса, ребята от нечего делать стали чертить веткой по земле. Их движения сначала были неосмысленными. Потом оказалось, что Аня рисовала трапецию, а Боря, заметив это, соединил отрезком в нарисованной Аней трапеции середины диагоналей. Аня посмотрела сначала на Бору, потом на землю, и, наконец, исподлобья чуть слышно сказала:

- Теперь трапеции две. Давай я соединю середины диагоналей в новой трапеции.
- Давай. А я тогда соединю середины диагоналей в той трапеции, которая получится после того, как ты проведешь линию.
- Это может продолжаться долго...
- Бесконечно долго...
- Интересно, как связаны длины отрезков, которые мы будем чертить раз за разом?
- Мне кажется, что они сходятся.
- А я думаю, что нет.
- Да сходятся же, смотри!
- Нет, не сходятся!
- Давай позвоним нашим преподавателям математического анализа и спросим их?
- Звони. Если вдруг окажется, что я не права, то мы перейдем на остановку на противоположную сторону, и я провожу тебя до твоего дома около Дворца пионеров.
- По рукам.

Боря стал звонить своему семинаристу по математическому анализу. Где расстанутся Аня с Борей: около Парка культуры или рядом с Дворцом пионеров?