ДЗ№2

Алексенко Степан Владимирович

Задача 1. Одним из самых часто встречающихся неправильных решений задачи 6 из первого домашнего задания было такое: «Если Боря увидит, что после его хода получится периодическая десятичная дробь, то он поставит такое число, чтобы избежать периода». В этом рассуждении есть несколько ошибок.

1. Предположим, что Боря послушался этого совета и сделал «правильный» ход. Означает ли это, что Аня уже не сможет выиграть?
2. Докажите, что может случиться так, что какую бы цифру $n \in \{0, 1, ..., 9\}$ ни написал Боря, будет получаться число, состоящее из $k(n)$-кратного ($k(n) \geqslant 2$) приставления друг к другу некоторого числа $m(n)$.

Задача 2. Найдите предел следующих последовательностей или докажите, что его не существует:

1. $h_n = \frac{C_n^k}{C_n^{n-k}}$, где k — некоторое фиксированное число.
2. $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$;
3. $e_n = (1 - \frac{1}{n})^n$;

Задача 3. Какие из следующих утверждений верны, а какие — нет? Объясните ответ.

1. Если в любой окрестности точки a лежит бесконечно много членов последовательности a_n, то последовательность a_n сходится к a;
2. Если сходящиеся последовательности a_n и b_n таковы, что для любых натуральных n $a_n \leqslant b_n$, а последовательность c_n такова, что для любого n выполняются неравенства $a_n < c_n < b_n$, то последовательность c_n сходится.
3. Если в определении предела последовательности заменить начало «Для любого положительного ε найдется номер N, такой, что...» на «Для некоторого положительного ε и для любого номера N, такого, что...», то получится определение того, что последовательность a_n не сходистя к a;

Задача 4. Известно, что $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$ при $n \geqslant 1$. Найдите предел последовательности a_n.

Задача 5. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве $\mathring{U}_c(a)$. Пусть известно, что

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$
$$\lim_{x \to a} g(x) = 2$$

Что можно сказать про $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x)$? Утверждение должно быть доказано со всеми ε и δ.

Задача 6. . . . Футбол в Лужниках закончился поздно. Боря собрался проводить Аню до ее дома рядом с Парком культуры. Сидя на остановке в ожидании последнего троллейбуса, ребята от нечего делать стали чертить веткой по земле. Их движения сначала были неосмысленными. Потом оказалось, что Аня рисовала трапецию, а Боря, заметив это, соединил отрезком в нарисованной Аней трапеции середины диагоналей. Аня посмотрела сначала на Борю, потом на землю, и, наконец, исподлобья чуть слышно сказала:

- Теперь трапеции две. Давай я соединю середины диагоналей в новой трапеции.

- Давай. А я тогда соединю середины диагоналей в той трапеции, которая получится после того, как ты проведешь линию.

- Это может продолжаться долго...

- Бесконечно долго...

- Интересно, как связаны длины отрезков, которые мы будем чертить раз за разом?

- Мне кажется, что они сходятся.

- А я думаю, что нет.

- Да сходятся же, смотри!

- Нет, не сходятся!

- Давай позвоним нашим преподавателям математического анализа и спросим их?

- Звони. Если вдруг окажется, что я не права, то мы перейдем на остановку на противоположную сторону, и я провожу тебя до твоего дома около Дворца пионеров.

- По рукам.

Боря стал звонить своему семинаристу по математическому анализу. Где расстанутся Аня с Борей: около Парка культуры или рядом с Дворцом пионеров?