

Квазимногочлены

Определение 1.

Функция вида $e^{\lambda x}P(x)$, где λ - некоторое число, $P(x)$ - многочлен степени n , называются квазимногочленами степени n с показателем λ .

Задача 1.

Докажите, что множество K_λ^n квазимногочленов степени не выше n образуют линейное пространство. Найдите размерность этого пространства.

Задача 2.

Докажите, что линейное пространство K_λ^n инвариантно относительно действия оператора дифференцирования D , $Df = f'$, т.е. что если $f \in K_\lambda^n$, то и $f' \in K_\lambda^n$.

Задача 3.

Найдите собственные векторы оператора D в пространстве K_λ^n . При каких n у оператора D есть собственный базис в пространстве K_λ^n ?

Задача 4.

Докажите, что квазимногочлены $e^{\lambda x}$, $e^{\lambda x}x$, $e^{\lambda x}x^2$, ..., $e^{\lambda x}x^n$ образуют базис K_λ^n . Найдите матрицу оператора D в этом базисе.

Замечание. Именно этому факту мы обязаны тем, то в курсе линейной алгебры мы проходим ЖНФ, а не, скажем, циклическую форму матриц.

Задача 5.

Пусть $\chi(y) = a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_1 y + a_0$ - многочлен. Найдите $\chi(D)f$.

Задача 6.

1. Пусть $\chi(y) = y - 5$. Рассмотрим пространство K_λ^3 и оператор $\chi(D)$, действующий в этом пространстве. Найдите ядро и образ этого оператора.
2. Пусть $\chi(y) = (y - \lambda_1)(y - \lambda_2) \dots (y - \lambda_n)$ - многочлен степени n с различными корнями $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. При каких λ оператор $\chi(D)$ будет иметь нетривиальное ядро в пространстве K_λ^m ?

Задача 7.

Пусть λ - корень кратности k многочлена $\chi(y)$. Докажите, что все многочлены $e^{\lambda x}$, $e^{\lambda x}x$, $e^{\lambda x}x^2$, ..., $e^{\lambda x}x^{k-1}$ принадлежат ядру отображения $\chi(D)$ в пространстве K_λ^m , где $m \geq k$.

Задача 8.

Найдите образ пространства K_λ^m при отображении $\chi(D)$, если λ - корень кратности k многочлена $\chi(y)$.

Задача 9.

Найдите прообраз пространства K_λ^m при отображении $\chi(D): K_\lambda^N \rightarrow K_\lambda^M$, если λ - корень кратности k многочлена $\chi(y)$, $m < M < N + k$.

Задача 10.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами вида:

$$a_n f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \dots + a_1 f' + a_0 f = e^{\lambda x} P(x)$$

Где $P(x)$ - многочлен степени m , λ - корень кратности k многочлена $\chi(y) = a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_1 y + a_0$.

1. Найдите характеристический многочлен этого уравнения
2. Найдите оператор, действующий на пространстве n раз дифференцируемых функций, действующий на неизвестную функцию в этом уравнении.
3. Чему равен образ неизвестной функции при действии этого оператора?
4. Запишите уравнение в виде $Ax = b$, где x, b – некоторые функции, x - известная, b - неизвестная, A – (дифференциальный) оператор.
5. Какому пространству из обсужденных в листочке принадлежит b ?
6. Напишите (любой) способ нахождения какого-нибудь частного решения этого уравнения.