

# Квазимногочлены

---

## Определение 1.

Функция вида  $e^{\lambda x}P(x)$ , где  $\lambda$  - некоторое число,  $P(x)$  - многочлен степени  $n$ , называются квазимногочленами степени  $n$  с показателем  $\lambda$ .

## Задача 1.

Докажите, что множество  $K_\lambda^n$  квазимногочленов степени не выше  $n$  образуют линейное пространство. Найдите размерность этого пространства.

## Задача 2.

Докажите, что линейное пространство  $K_\lambda^n$  инвариантно относительно действия оператора дифференцирования  $D$ ,  $Df = f'$ , т.е. что если  $f \in K_\lambda^n$ , то и  $f' \in K_\lambda^n$ .

## Задача 3.

Найдите собственные векторы оператора  $D$  в пространстве  $K_\lambda^n$ . При каких  $n$  у оператора  $D$  есть собственный базис в пространстве  $K_\lambda^n$ ?

## Задача 4.

Докажите, что квазимногочлены  $e^{\lambda x}$ ,  $e^{\lambda x}x$ ,  $e^{\lambda x}x^2$ , ...,  $e^{\lambda x}x^n$  образуют базис  $K_\lambda^n$ . Найдите матрицу оператора  $D$  в этом базисе.

Замечание. Именно этому факту мы обязаны тем, то в курсе линейной алгебры мы проходим ЖНФ, а не, скажем, циклическую форму матриц.

## Задача 5.

Пусть  $\chi(y) = a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_1 y + a_0$  - многочлен. Найдите  $\chi(D)f$ .

## Задача 6.

1. Пусть  $\chi(y) = y - 5$ . Рассмотрим пространство  $K_\lambda^3$  и оператор  $\chi(D)$ , действующий в этом пространстве. Найдите ядро и образ этого оператора.
2. Пусть  $\chi(y) = (y - \lambda_1)(y - \lambda_2) \dots (y - \lambda_n)$  - многочлен степени  $n$  с различными корнями  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . При каких  $\lambda$  оператор  $\chi(D)$  будет иметь нетривиальное ядро в пространстве  $K_\lambda^m$ ?

## Задача 7.

Пусть  $\lambda$  - корень кратности  $k$  многочлена  $\chi(y)$ . Докажите, что все многочлены  $e^{\lambda x}$ ,  $e^{\lambda x}x$ ,  $e^{\lambda x}x^2$ , ...,  $e^{\lambda x}x^{k-1}$  принадлежат ядру отображения  $\chi(D)$  в пространстве  $K_\lambda^m$ , где  $m \geq k$ .

## Задача 8.

Найдите образ пространства  $K_\lambda^m$  при отображении  $\chi(D)$ , если  $\lambda$  - корень кратности  $k$  многочлена  $\chi(y)$ .

## Задача 9.

Найдите прообраз пространства  $K_\lambda^m$  при отображении  $\chi(D): K_\lambda^N \rightarrow K_\lambda^M$ , если  $\lambda$  - корень кратности  $k$  многочлена  $\chi(y)$ ,  $m < M < N + k$ .

## Задача 10.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами вида:

$$a_n f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \dots + a_1 f' + a_0 f = e^{\lambda x} P(x)$$

Где  $P(x)$  - многочлен степени  $m$ ,  $\lambda$  - корень кратности  $k$  многочлена  $\chi(y) = a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_1 y + a_0$ .

1. Найдите характеристический многочлен этого уравнения
2. Найдите оператор, действующий на пространстве  $n$  раз дифференцируемых функций, действующий на неизвестную функцию в этом уравнении.
3. Чему равен образ неизвестной функции при действии этого оператора?
4. Запишите уравнение в виде  $Ax = b$ , где  $x, b$  – некоторые функции,  $x$  - известная,  $b$  - неизвестная,  $A$  – (дифференциальный) оператор.
5. Какому пространству из обсужденных в листочке принадлежит  $b$ ?
6. Напишите (любой) способ нахождения какого-нибудь частного решения этого уравнения.