Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2012/13 уч. год
Линейная алгебра
ДЗ №6: приведение квадратичной формы к главным осям ()

Задача 1. Рассмотрим билинейную форму

$$B(\vec{x},\vec{y}) = -2x_1\left(-y_1+y_2+5y_3\right) - x_2\left(2y_1-11y_2+8y_3\right) - x_3\left(10y_1+8y_2-5y_3\right),$$

где $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ и $\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$.

(a) Докажите, что эта форма действительно является билинейной.
(b) Докажите, что эта форма является симметричной, то есть $B(\vec{x},\vec{y})=B(\vec{y},\vec{x})$.
(c) Для всех пар базисных векторов e_i, e_j найдите значение формы $B(e_i,e_j)$.
(d) Составьте матрицу билинейной формы B.
(e) Выпишите квадратичную форму, соответствующую билинейной форме B.
(f) Пусть A — оператор, записывающийся в стандартном базисе той же матрицей, что и билинейная форма B. Найдите все собственные векторы и все собственные значения оператора A.
(g) Проверьте, что собственные векторы оператора A взаимно ортогональны.
(h) Нормируйте базис из собственных векторов оператора A, то есть замените каждый вектор на коллинеарный ему вектор длины 1.
(i) Составьте матрицы переходов от стандартного базиса к базису, найденному в предыдущем пункте, и обратно.
(j) Запишите оператор A в базисе, найденном в 1h, то есть представьте матрицу A в виде $A=C^{-1}DC$, где C — ортогональная матрица. Проверьте результат, перемножив матрицы.
(k) Запишите билинейную форму в базисе, найденном в 1h, то есть представьте матрицу A в виде $A=C^TDC$, где C — ортогональная матрица. Проверьте результат, перемножив матрицы.

Задача 2. Рассмотрим билинейную форму,

$$B(\vec{x},\vec{y}) = -x_1\left(y_1-4y_2+8y_3\right) - x_2\left(-4y_1+7y_2+4y_3\right) - x_3\left(8y_1+4y_2+y_3\right),$$

где $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ и $\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$.

(a) Докажите, что эта форма действительно является билинейной.
(b) Докажите, что эта форма является симметричной, то есть $B(\vec{x},\vec{y})=B(\vec{y},\vec{x})$.
(c) Для всех пар базисных векторов e_i, e_j найдите значение формы $B(e_i,e_j)$.
(d) Составьте матрицу билинейной формы B.
(e) Выпишите квадратичную форму, соответствующую билинейной форме B.
(f) Пусть A — оператор, записывающийся в стандартном базисе той же матрицей, что и билинейная форма B. Найдите все собственные векторы и все собственные значения оператора A.
(g) Найдите базис, состоящий из собственных векторов оператора A. Однозначно ли решается эта задача? Почему?

(h) Нормируйте базис из собственных векторов оператора A, то есть замените каждый вектор на коллинеарный ему вектор длины 1.
(i) Составьте матрицы переходов от стандартного базиса к построенному в предыдущем пункте и обратно.
(j) Получился ли базис ортонормированным? Как будет меняться матрица оператора при переходе к этому базису? А матрица билинейной формы?
(k) При помощи процесса ортогонализации постройте из базиса, найденного в 2h ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов рассматриваемого оператора.
(l) Запишите оператор A в базисе, построенном в предыдущем пункте, то есть представьте матрицу A в виде $A = C^{-1}DC$, где C — ортогональная матрица. Проверьте результат, перемножив матрицы.
(m) Запишите билинейную форму в базисе, найденном в 2k, то есть представьте матрицу A в виде $A = C^TDC$, где C — ортогональная матрица. Проверьте результат, перемножив матрицы.

Задача 3. Нарисуйте на плоскости множество точек $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, для которых $f(\vec{x}) = 1$, если квадратичная форма $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ задаётся формулой
(a) $f(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2$;
(b) $f(\vec{x}) = 5x_1^2 + 6x_2^2$;
(c) $f(\vec{x}) = x_1^2 - x_2^2$.

Задача 4. Приведите квадратичную форму (a) $f(\vec{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2$; (b) $f(\vec{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2$ к главным осям. Нарисуйте на плоскости (в старых координатах) множество точек $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, для которых $f(\vec{x}) = 1$. На том же рисунке изобразите новые координатные оси.

Задача 5. Рассмотрим функцию $F(t, x, y, z) = -t^2 - 2tx - 4x^2 - 6xy - 4y^2 - 4yz - 6z^2$. Является ли точка $(0, 0, 0, 0)$ для функции F точкой максимума, минимума, или ни тем, ни другим?