Совместный бакалавриат ВШЭ–РЭШ, 2012/13 уч. год.
Линейная алгебра
Домашнее задание №5

И. А. Хованская, С. В. Головань, А. М. Малокостов, А. П. Пушкарь

Фамилия и имя студента: Тестовый Вариант

Напоминаем, что куда лучше вообще не сдавать задание или сдать частично сделанное задание, чем сдать хотя бы частично списанный текст.

Задача 1. Рассмотрите пространство $\mathbb{R}^6$. Скалярное произведение векторов $u = (x_1, x_2, \dots, x_6)$ и $v = (y_1, y_2, \dots, y_6)$ задается формулой:

$$(u, v) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_6 y_6.$$

Длина вектора u задаётся формулой:

$$|u|^2 = (u, u) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_6^2.$$

Пусть L — линейное подпространство, порождённое векторами

$$\begin{aligned} v_1 &= (3, 1, -1, 0, -2, 0), \\ v_2 &= (-3, -1, 1, 0, 2, 0), \\ v_3 &= (0, -3, 1, 0, 3, -3), \\ v_4 &= (3, -1, 2, 3, -1, 0). \end{aligned}$$

a. Обозначьте через v_1' вектор v_1. Докажите, что любой вектор вида $\lambda v_1' + v_2$ лежит в подпространстве, порождённом векторами v_1, v_2.
b. Найдите вектор v_2', вида $\lambda v_1' + v_2$, ортогональный вектору v_1'. Используйте условие ортогональности, то есть равенства нулю скалярного произведения (v_2', v_1'), как условие на λ.
c. Докажите, что набор векторов $\{v_1',\ v_2'\}$, если v_2' не равен нулю, или $\{v_1'\}$, если v_2' равен нулю, порождает то же подпространство, что и векторы $v_1,\ v_2$, и образует в нём ортогональный базис (то есть базис, в котором все векторы попарно ортогональны).
d. Если вектор v_2' из пункта b равен нулю, исключите вектор v_2 из исходного набора, перенумеруйте последующие векторы и повторите процедуру пункта b. Повторяйте её таким образом, пока не найдёте v_2', или пока набор не закончится.
e. Докажите, что любой вектор вида $\lambda_1 v_1' + \lambda_2 v_2' + v_3$ лежит в линейной оболочке векторов v_1, v_2, v_3.
f. Найдите такой вектор v_3' вида $\lambda_1 v_1' + \lambda_2 v_2' + v_3$, что он ортогонален векторам v_1' и v_2'. Используйте условие ортогональности как условие на λ_1 и λ_2. Учтите тот факт, что v_1' и v_2' ортогональны.
g. Если такой вектор v_3' не равен нулю, докажите, что набор векторов $\{v_1',\ v_2',\ v_3'\}$ образует ортогональный базис в подпространстве, порождённом векторами $v_1,\ v_2,\ v_3$. Если он равен нулю, докажите, что набор $\{v_1',\ v_2'\}$ образует ортогональный базис в том же подпространстве.
h. Продолжая процесс, найдите ортогональный базис в L.
i. Дополните построенный набор до ортогонального базиса в $\mathbb{R}^6$ следующим образом: дополните его до базиса в $\mathbb{R}^6$ как-нибудь, затем продолжите процесс ортогонализации.
j. Для каждого вектора v_i' из построенного ортогонального базиса в $\mathbb{R}^6$ постройте вектор $h_i = \dfrac{1}{|v_i'|} v_i'$. Докажите, что полученная система векторов является ортонормированным базисом в $\mathbb{R}^6$.

Задача 2. Рассмотрите линейное пространство непрерывных функций на отрезке $[0, 2\pi]$. Введите скалярное произведение следующим образом:

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx.$$

Рассмотрите подпространство L, порождённое функциями

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sin(6x), \\ f_2(x) &= \cos(4x), \\ f_3(x) &= \cos(5x), \\ f_4(x) &= \cos(7x). \end{aligned}$$

Докажите, что функции $f_1, \ldots, f_4$ образуют ортогональный базис в подпространстве L. Постройте ортонормированный базис в L вида $\lambda_1 f_1, \ldots, \lambda_4 f_4$.

Задача 3. Рассмотрите пространство $\mathbb{R}^4$. Пусть стандартный базис ортонормирован. Рассмотрите новый базис, заданный векторами

$$\begin{aligned} e'_1 &= (1, -3, -2, 1), \\ e'_2 &= (1, 1, -2, 2), \\ e'_3 &= (-3, -2, 2, 0), \\ e'_4 &= (2, 0, -1, -2). \end{aligned}$$

a. Найдите (e'_i, e'_j) для всех пар $i,\ j = 1, \ldots, 4$. Запишите матрицу скалярного произведения в новом базисе. Представьте эту матрицу в виде $C^T E C$ для некоторой матрицы C. (Здесь C^T — результат транспонирования матрицы C; иными словами, это матрица, столбцы которой совпадают со строками матрицы C.)

b. Пусть u, v — некоторые вектор-столбцы, A — произвольная матрица, причём $Au = v$. Докажите, что тогда $v^T = u^T A^T$. (Здесь v^T — тот же вектор v, только записанный в строчку, u^T — вектор u, записанный в строчку, A^T — транспонированная матрица A.)

c. Рассмотрите вектор $u = x'_1 e'_1 + \ldots + x'_4 e'_4$. Найдите координаты $x_1, \ldots, x_4$ этого вектора в старом базисе. Найдите такую матрицу D, что верны равенства:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \end{pmatrix} D^T.$$

d. Билинейная форма задана матрицей B в стандартном базисе:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Найдите её матрицу в новом базисе. Представьте найденную матрицу в виде $F^T B F$ для некоторой матрицы F.

 Фамилия и имя студента: Тестовый Вариант

Задача 4. Рассмотрите пространство $\mathbb{R}^2$. Пусть $u = (1, 1)$, $v = (3, 4)$. Рассмотрите такой линейный оператор f, что $f(u) = 5u$, $f(v) = 7v$.

a. Найдите его собственные векторы. Убедитесь, что они находятся в первой четверти.
b. При доказательстве теоремы Фробениуса используется теорема о неподвижной точке, которая утверждает не только существование, а еще и единственность неподвижной точки (и значит соответствующего собственного вектора). Почему в данном случае утверждение о единственности собственного вектора в первой четверти не выполняется?

