Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2012/13 уч. год.
Линейная алгебра
Домашнее задание №4

И. А. Хованская, С. В. Головань, А. М. Малокостов, А. П. Пушкарь

Фамилия и имя студента: Тестовый Вариант

Напоминаем, что куда лучше вообще не сдавать задание или сдать частично сделанное задание, чем сдать хотя бы частично списанный текст.

Задача 1. Пусть оператор $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ задаётся в стандартном базисе матрицей $A = \begin{bmatrix} 13 & -8 \\ 24 & -15 \end{bmatrix}$.

a. Найдите такие числа λ, что $\det(A - \lambda E) = 0$.
b. Рассмотрим *тождественный оператор* id, который каждый вектор переводит в себя (то есть $\operatorname{id} v = v$ для любого вектора v). Записать матрицу оператора id в стандартном базисе.
c. Запишите в стандартном базисе матрицу линейного оператора $(f - \lambda \cdot \mathrm{id})$.
d. Найдите такие числа λ, что оператор $(f - \lambda \cdot \mathrm{id})$ имеет нетривиальное ядро.
e. Для каждого λ из пункта d найдите ядро оператора $(f - \lambda \cdot \mathrm{id})$.
Подсказка: нетривиальное ядро ненулевого оператора на двумерном пространстве может быть только одномерным (если бы оно было двумерным, оператор был бы нулевым), то есть его можно представить как множество векторов вида cv, где c — любое число, v — некоторый ненулевой вектор. Его-то и нужно найти.
f. Выберите по ненулевому вектору из каждого подпространства, описанного в пункте e. Образуют ли эти векторы базис $\mathbb{R}^2$. Если да, то как выглядит оператор f в этом базисе?
g. Представьте матрицу A в виде $A = CBC^{-1}$, где C — некоторая матрица, B — диагональная матрица. Объясните, что записано по столбцам матриц C и C^{-1}.
h. Пусть $K = LML^{-1}$, где K, L, M — квадратные матрицы. Выразите матрицу K^n через матрицы M^n, L, L^{-1}.
i. Найдите матрицу A^n, n — любое натуральное число.

Задача 2. Пусть оператор $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ задаётся в стандартном базисе матрицей $A = \begin{bmatrix} 11 & -25 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$.

a. Найдите такое число λ, что $\det(A - \lambda E) = 0$. Докажите, что оно единственное.
b. Найдите такое число λ, что оператор $(f - \lambda \cdot \mathrm{id})$, где id — тождественный оператор из задачи 1, имеет нетривиальное ядро. Докажите, что оно единственное.
c. Найдите ядро и образ отображения $(f - \lambda \cdot \mathrm{id})$.
d. Найдите какой-нибудь ненулевой вектор v, не лежащий в ядре отображения $(f - \lambda \cdot \mathrm{id})$. Найдите $w = (f - \lambda \cdot \mathrm{id})v$. Докажите, что векторы v, w образуют базис в $\mathbb{R}^2$.
e. Запишите матрицу оператора f в базисе (v, w).
f. Представьте матрицу A в виде $A = CBC^{-1}$, где C — некоторая невырожденная матрица, а B — жорданова матрица. Объясните, что записано по столбцам матриц C и C^{-1}.
g. Найдите матрицу A^n, где n — любое натуральное число.

Задача 3. a. Найдите площадь параллелограмма, порождённого векторами $(8, 2)$ и $(3, 6)$.
b. Найдите объем параллелепипеда, порождённого векторами $(4, 4, 5)$, $(1, 4, 2)$ и $(2, 2, 4)$.

Задача 4. a. Найдите размерность линейной оболочки векторов $(-22, -12, -20, -16)$, $(-4, -4, -3, -1)$, $(26, 16, 23, 17)$, $(11, 6, 10, 8)$, $(-7, -2, -7, -7)$
b. Выберите из этого набора векторы, составляющие базис линейной оболочки данного набора.
c. Дополните этот базис до базиса $\mathbb{R}^4$.
d. Найдите какое-нибудь прямое дополнение линейной оболочки данного набора.
Замечание: Прямым дополнением подпространства L пространства V называется такое подпространство M пространства V, что $V = L \oplus M$.