

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2012—13 уч. год

Линейная алгебра

Домашнее задание №3

И. А. Хованская, Ю. Г. Кудряшов, А. М. Малокостов, П. Ф. Соломатин, И. В. Щуров

Фамилия и имя студента: Тестовый Вариант

Напоминаем, что куда лучше вообще не сдавать задание или сдать частично сделанное задание, чем сдать хотя бы частично списанный текст.

**Задача 1.** Даны следующие отображения  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ :

- $f$  — поворот на  $60$  градусов по часовой стрелке.
  - $g$  — симметрия относительно прямой  $y = -x$ .
  - $h$  — растяжение вдоль оси  $y$  в  $3$  раза (то есть такое отображение, при котором координата  $y$  любого вектора увеличивается в  $3$  раза, а другая координата не меняется).
- a. Являются ли отображения  $f, g, h$  линейными?
  - b. Нарисуйте на плоскости образы точек  $A = (2, 4), B = (-2, 2), C = (-3, -4)$ , прямых  $y = x, y = -x, x = 0, y = 0$  при действии отображений  $f, g, h$ .
  - c. Та же задача для композиций  $fg, gf$ .
  - d. Запишите отображения  $f, g, h$  в виде матриц в стандартном базисе.
  - e. Запишите отображения  $fh, hf, gh, fg$  в виде матриц в стандартном базисе.
  - f. Проверьте, что композиция отображений описывается произведением соответствующих матриц.
  - g. Найдите образ окружности  $x^2 + y^2 = 1$  при действии отображений  $fg, gf$ .
  - h. Найдите векторы, если такие существуют, которые при действии отображений  $f, g, h, fh, gh, fg$  умножаются на некоторое вещественное число. (Такой вектор всегда определяется с точностью до умножения на число, выберите любой.)
  - i. Для тех отображений, у которых существует два вектора из предыдущего пункта, запишите действие отображения в базисе, составленном из этих векторов.

**Задача 2.** Пусть

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Вычислите все произведения  $AB, BA, AC, CA, BC, CB$ , которые можно вычислить.

**Задача 3.** Отображения  $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  заданы матрицами  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$  и  $B = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$  соответственно.

- a. Нарисуйте на плоскости образы точек  $A = (-1, -1), B = (1, -1), C = (1, 0), D = (-1, 1), E = (0, 1), F = (1, 1)$  при действии отображений  $f, g$ .
- b. Найти все векторы, которые под действием отображения  $f$  переходят в  $(0, 0), (-10, -8), (-12, 12)$ .
- c. Найти все векторы, которые под действием отображения  $g$  переходят в  $(0, 0), (-10, -8), (-12, 12)$ .
- d. Найти ядро и образ отображений  $f$  и  $g$ .

**Задача 4.** Найти образ и ядро отображения, заданного матрицей

a. 
$$A = \begin{bmatrix} -7 & -7 & -5 \\ 1 & 6 & 1 \\ -6 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

b. 
$$B = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -4 \\ -12 & -4 & -16 \\ 15 & 5 & 20 \end{bmatrix}$$

c. 
$$C = \begin{bmatrix} -7 & -4 & 5 \\ 4 & -1 & 0 \\ -19 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

**Задача 5.** Задача решается геометрически.

Начертите на плоскости два вектора:  $\xi = (4, 1)$  и  $\eta = (4, 4)$ . Рассмотрим параллелограмм, две стороны которого — данные векторы, две другие им параллельны.

- Докажите, что площадь параллелограмма не изменится, если вектор  $\xi$  заменить вектором  $\xi + \lambda\eta$ , где  $\lambda$  — любое вещественное число.
- Докажите, что площадь параллелограмма увеличится в  $|\lambda|$  раз, если вектор  $\xi$  заменить вектором  $\lambda\xi$ , где  $\lambda$  — любое вещественное число.
- Докажите, что площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\xi = (a, b)$ ,  $\eta = (c, d)$ , равна  $|ad - bc|$