

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2012—13 уч. год.

Линейная алгебра

Домашнее задание №2

И. А. Хованская, С. В. Головань, А. М. Малокостов, А. П. Пушкарь

Фамилия и имя студента: Тестовый Вариант

Напоминаем, что куда лучше вообще не сдавать задание или сдать частично сделанное задание, чем сдать хотя бы частично списанный текст.

- Задача 1.** а. Постройте такой многочлен $f(x)$ степени 3, что $f(-7) = 0$, $f(-5) = 0$, $f(5) = 0$.
б. Постройте такой многочлен $g(x)$ степени 3, что $f(-7) = 0$, $f(-5) = 0$, $f(2) = 1$, $f(5) = 0$.
с. Постройте такой многочлен $h(x)$ степени 3, что $f(-7) = 1$, $f(-5) = 0$, $f(2) = 0$, $f(5) = 0$.
д. Постройте такой многочлен $u(x)$ степени 3, что $f(-7) = 7$, $f(-5) = 5$, $f(2) = 0$, $f(5) = 0$.
е. Постройте такой многочлен $v(x)$ степени 3, что $f(-7) = 7$, $f(-5) = 5$, $f(2) = 4$, $f(5) = 6$.
ф. Пусть a_1, a_2, \dots, a_{n+1} — попарно различные числа. Рассмотрим многочлены

$$f_k(x) = \frac{\prod_{i \neq k, i=1}^{n+1} (x - a_i)}{\prod_{i \neq k, i=1}^{n+1} (a_k - a_i)}.$$

Найдите степени f_k .

- г. Найдите значение многочлена f_k в точках a_1, a_2, \dots, a_{n+1} .
г. Найдите значение многочлена

$$\sum_{k=1}^{n+1} b_k f_k,$$

где b_1, b_2, \dots, b_{n+1} — некоторый набор чисел, в точках a_1, a_2, \dots, a_{n+1} .

- и. Постройте линейную комбинацию f многочленов f_k такую, что $f(a_i) = c_i$, где c_1, c_2, \dots, c_{n+1} — некоторый данный набор чисел.
ж. Постройте многочлен f степени не выше трёх, такой, что $f(-1) = 2$, $f(0) = 3$, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$.
к. Докажите, что многочлены f_1, \dots, f_{n+1} образуют базис в пространстве многочленов степени не выше n .

Указание. Многочлен степени n имеет не более чем n различных корней. Если у двух многочленов степени n совпадают значения в $(n+1)$ точке, значит, их разность обращается в $(n+1)$ точке в ноль.

Задача 2. Рассмотрим отображение, действующее в пространстве многочленов степени не выше 6 в себя:

$$f(P) = (x^2 - 2x - 3)P''.$$

- а. Докажите, что f — линейный оператор
б. Найдите $\ker f$ и $\operatorname{Im} f$.
с. Найдите базис подпространства $\ker f$.
д. Принадлежит ли многочлен $-4x^6 + x^5 + 3x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x + 3$ линейной оболочке этих векторов?
е. Продолжите построенный базис подпространства $\ker f$ до базиса всего пространстве многочленов степени не выше 6.
ф. Найдите образы всех базисных векторов под действием f .
г. Найдите координаты образов базисных векторов в выбранном базисе.