Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2012—13 уч. год.
Линейная алгебра
Домашнее задание №1

И. А. Хованская, С. В. Головань, А. М. Малокостов, А. П. Пушкарь

Фамилия и имя студента: Тестовый вариант

Напоминаем, что куда лучше вообще не сдавать задание или сдать частично сделанное задание, чем сдать хотя бы частично списанный текст.

Определение 1. Непустое множество G с заданной на нём бинарной операцией $*\colon G \times G \to G$ называется группой $(G, *)$, если выполнены следующие аксиомы:
a. ассоциативность: $\forall a,\ b,\ c \in G : (a * b) * c = a * (b * c)$;
b. наличие нейтрального элемента: $\exists e \in G\ \forall a \in G : a * e = e * a = a$;
c. наличие обратного элемента: $\forall a \in G\ \exists a^{-1} \in G : a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$.

Замечание 1. Если групповая операция называется сложением и обозначается знаком «+», то нейтральный элемент принято называть нулём и обозначать «0», обратный элемент принято в этом случае обозначать «$-a$».

Задача 1. Образуют ли группу по сложению
a. рациональные числа вида $\frac{n}{9}$, где n — натуральное число?
b. рациональные числа вида $\frac{n}{9}$, где n — любое целое число?
c. рациональные числа вида $\frac{n}{9}$, где n — любое целое число, такое, что дробь $\frac{n}{9}$ несократима?

Задача 2. Доказать, что множество векторов с координатами (x, y, z, t) из пространства $\mathbb{R}^4$, удовлетворяющее двум соотношениям:

$$\begin{aligned} 5t + x + 3y + z &= 0 \\ x + y + z + t &= 0 \end{aligned}$$

образуют линейное подпространство. Найти хотя бы один ненулевой вектор в этом подпространстве.

Задача 3. Доказать, что множество комплексных чисел $\{1,\ \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} + i\left(-\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}\right),\ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}i}{2},\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} + i\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}\right),\ i,\ -\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} + i\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}\right),\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}i}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},\ -\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} + i\left(-\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}\right),\ -1,\ -\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} + i\left(-\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right),\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}i}{2},\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2},\ -\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} + i\left(-\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right),\ -i,\ -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} + i\left(-\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right),\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}i}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} + i\left(-\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\}$ является группой по умножению. Найти нейтральный элемент; элемент, обратный к $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}i}{2}$. Изобразите элементы этого множества на комплексной плоскости.

Задача 4. Решить уравнение $z^2 + 6z + 25 = 0$ Изобразить корни на комплексной плоскости.