Лекция 3. Обратная функция.

Хованская, Щуров, Сонин

Представим себе такую ситуацию. Вы пытаетесь вспомнить, когда произошло какое-то событие. Вы не можете вспомнить, когда именно, в каком году оно произошло. Однако помните, что в это время вам задали выучить наизусть стихотворение Пушкина «Я помню чудное мгновение». Эта информация оказывается полезной: теперь вы можете вспомнить, как была устроена программа по литературе, когда вы проходили и учили эти стихи, а можете и заглянуть в учебник. Так, при помощи косвенного обстоятельства вы восстанавливаете дату интересующего вас события.

Что произошло в рассказанной истории с точки зрения функции? Вам была известна функция – литературное произведение в школьной программе в зависимости от времени обучения. Эту функцию вы знаете или, по крайней мере, можете восстановить с помощью учебника. Вы не знали, какое значение аргумента (момент времени) вам нужно, но знали значение функции (литературное произведение), соответствующее этому моменту. Итак, по значению функции мы восстановили её аргумент.

Такие действия мы производим в жизни часто, совершенно не думая о функциях. Как же описать то, что мы сделали, на языке функций, избавившись от лишних подробностей?

Итак, пусть функция $f(x)$ в соответствие каждому элементу множества X (его называют областью определения) ставит элемент множества Y (его называют областью значений). Скажем, если речь идёт о телефонной книге, то X – множество людей, чьи телефоны там записаны, Y – множество телефонных номеров из этой книги. Мы же построили **обратную** функцию – функцию, которая по номеру телефона восстанавливает имя. Так, если мы говорим о телефонной книге в мобильном телефоне, если мы наберём номер, содержащийся в ней, то на экране высветится имя обладателя этого номера. Мы будем говорить, что $g(y)$ обратная к $f(x)$ функция, если $g(y) = x$ тогда и только тогда, когда $f(x) = y$.

У любой ли функции существует обратная? Попробуем разобраться.

Мы все знаем, что полиция часто ловит преступников по отпечаткам пальцев. Можно считать, что снимая отпечатки пальцев у людей, полиция находит функцию «отпечатки пальцев человека» - человеку ставятся в соответствие его отпечатки пальцев. Обнаружив на месте преступления чьи-то отпечатки пальцев, полицейские обращаются к каталогу, находят человека, которому принадлежат эти отпечатки, и вот он, подозреваемый! Можно сказать, что полиция использует обратную функцию к той, что построила, снимая отпечатки пальцев. Представим себе другую ситуацию. Совершено преступление. К счастью, у этого преступления есть свидетели, которые видели преступника. Опрос свидетелей приводит к выводу, что у преступника было две руки. Поможет ли эта информация установить, кто совершил преступление? Вряд ли. В чём разница с ситуацией с отпечатками пальцев? Отпечатки пальцев вещь уникальная, у разных людей разные отпечатки. Какую функцию мы попытались использовать в ситуации со свидетелями? Функцию «количество рук у человека», которая ставит в соответствие человеку количество имеющихся у него рук. По значению этой функции невозможно определить, что за аргумент у неё был, по улицам ходит очень много людей с двумя руками! Итак, для того, чтобы обратная функция существовала, нужно, чтобы каждое значение принималось только один раз. Зная отпечатки пальцев преступника, его поймать можно, зная только количество рук – нет.

Для обратной функции обычно используют обозначение $f^{-1}(x)$. Не нужно путать это обозначение с возведением в степень! **Внимание!**

$$f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$$

Посмотрим на знакомые нам функции, чтобы понять, у каких из этих функций есть обратные, и как эти обратные функции устроены.

Линейная функция

Пусть

$$f(x) = 6x - 4$$

Если мы знаем значение функции, скажем, $f(x) = 2$, можем ли мы найти значение аргумента функции x? Разумеется, да.

$$2 = 6x - 4$$

Значит,

$$6x = 4 + 2$$

Т.е.

$$x = 1$$

Задача решается и в общем случае

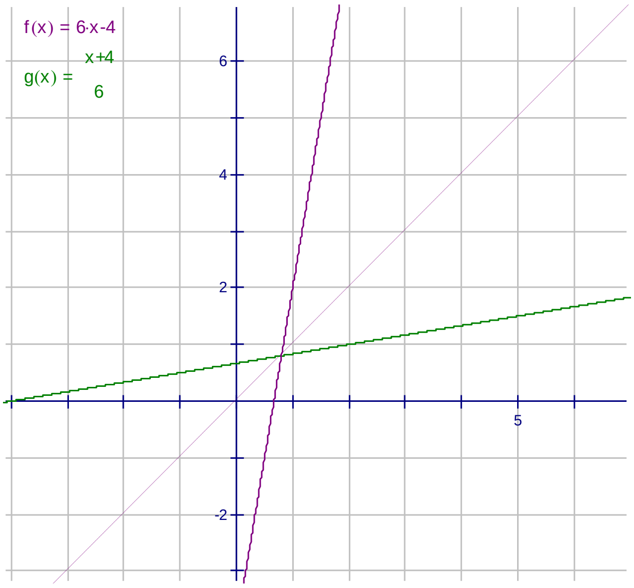
$$y = 6x - 4$$

Значит,

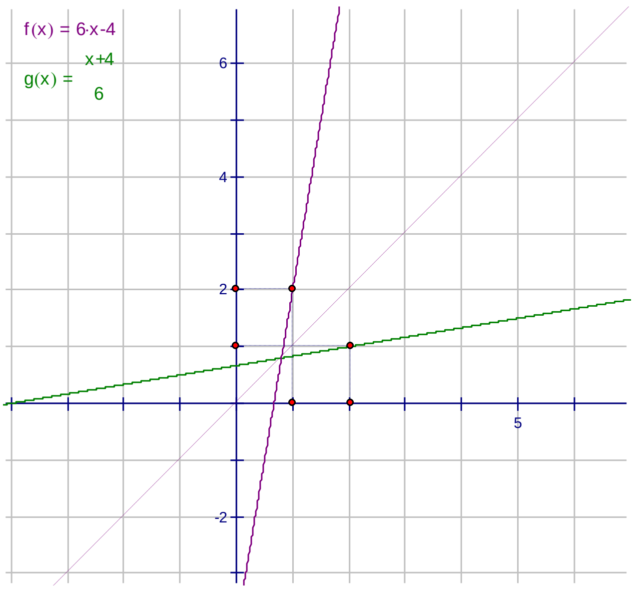
$$x = \frac{y+4}{6}$$

Построим графики этих двух функций $f(x) = 6x - 4$ и $g(x) = \frac{x+4}{6}$

Мы видим, что графики этих функций похожи. Ещё в прошлой лекции мы обсудили, что функция, обратная линейной, сама является линейной. Из этого следует, что графики обеих функций являются прямыми линиями. Мы видим, что график функции $f(x) = 6x - 4$ так же расположен относительно оси OX как график функции $g(x) = \frac{x+4}{6}$ относительно оси OY. Говоря другими словами, графики функций $f(x)$ и $g(x)$ симметричны относительно прямой $y = x$, изображённой на графике пунктиром.



Действительно, если точка с координатами (a, b) лежит на графике функции $f(x)$, это значит, что $b = 6a - 4$. Точка, симметричная точке (a, b) относительно прямой $y = x$ имеет координаты (b, a). Выразив a через b, мы получим как раз $a = \frac{b+4}{6}$, т.е. точка (b, a) лежит на графике функции $g(x)$. Конечно, для того, чтобы это понять, не обязательно было делать снова эти вычисления.



Если речь идёт о любой линейной функции, то ситуация будет такой же. Функция, обратная линейной, снова будет линейной. Графики этих функций симметричны относительно прямой $y = x$. Если

$$f(x) = ax + b$$

и $a \neq 0$, то

$$f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$$

Для нас особенно важно, что коэффициенты при x у линейной функции и обратной функции взаимно обратны. Это особенно легко понять, если посмотреть на прямую пропорциональность: если

$$y = ax$$

то

$$x = \frac{1}{a}y$$

Квадратичная функция

Рассмотрим какую-нибудь квадратичную функцию, например

$$y = x^2$$

Не сложно заметить, что у этой функции не существует обратной: в самом деле, если мы знаем, что $x^2 = 9$, мы не можем только по этой информации восстановить значение x, возможно два различных варианта $x = 3$ и $x = -3$. Если бы мы попробовали решить задачу аналитически, то упёрлись бы в ту же проблему: уравнение $x^2 = 9$ имеет два вещественных корня $x = 3$ и $x = -3$.

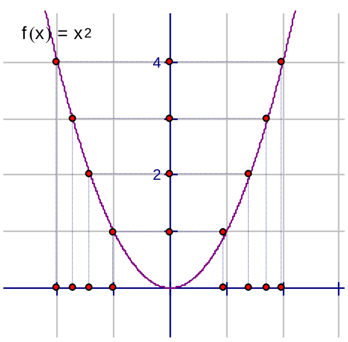
Итак, функции обратной

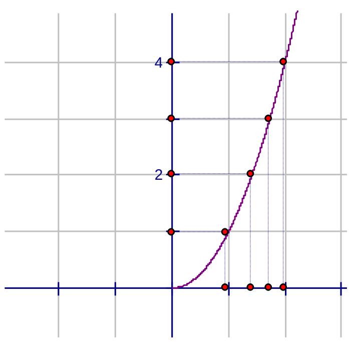
$$y = x^2$$

Не существует, это мы установили. С другой стороны, мы хорошо знаем и ловко пользуемся этой, вроде бы не существующей, функцией. Действительно, для нахождения числа, квадрат которого равен c, мы используем квадратный корень, хорошо знакомый нам ещё из школы. Как же мы решили проблему несуществования обратной функции? Или «квадратный корень» вовсе не функция? Здесь мы используем один полезный и простой трюк. Рассмотрим функцию

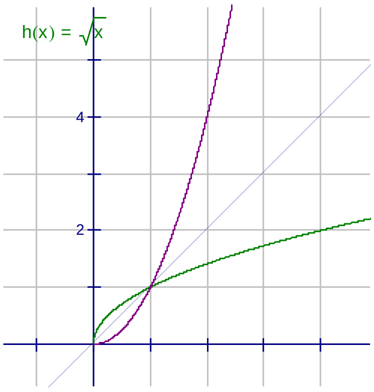
$$y = x^2$$

не на всей оси действительных чисел, а только на положительной полуоси. Здесь по значению функции значение аргумента восстанавливается однозначно, т.е. обратная функция существует! И правда, если мы знаем, что $x^2 = 9$ и $x \geq 0$, то $x = 3$.



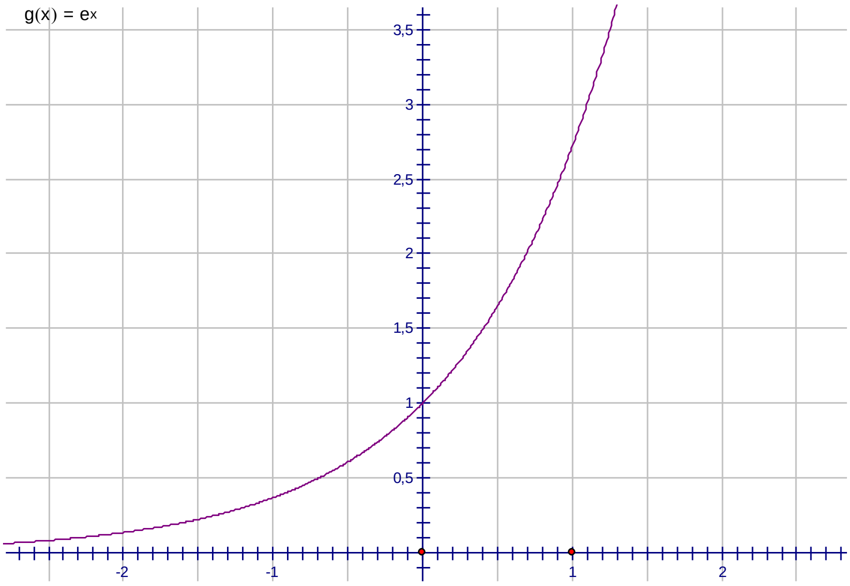


Итак, для квадратичной функции $y = x^2$ не существует обратной, если мы рассматриваем её на всей вещественной оси, и существует, если только на положительной полуоси. Обратная функция называется «корень квадратный», её график симметричен графику параболы $y = x^2$ относительно прямой $y = x$.



Экспонента

Другая функция, которую мы изучали – экспонента. Существует ли функция, обратная к экспоненте?

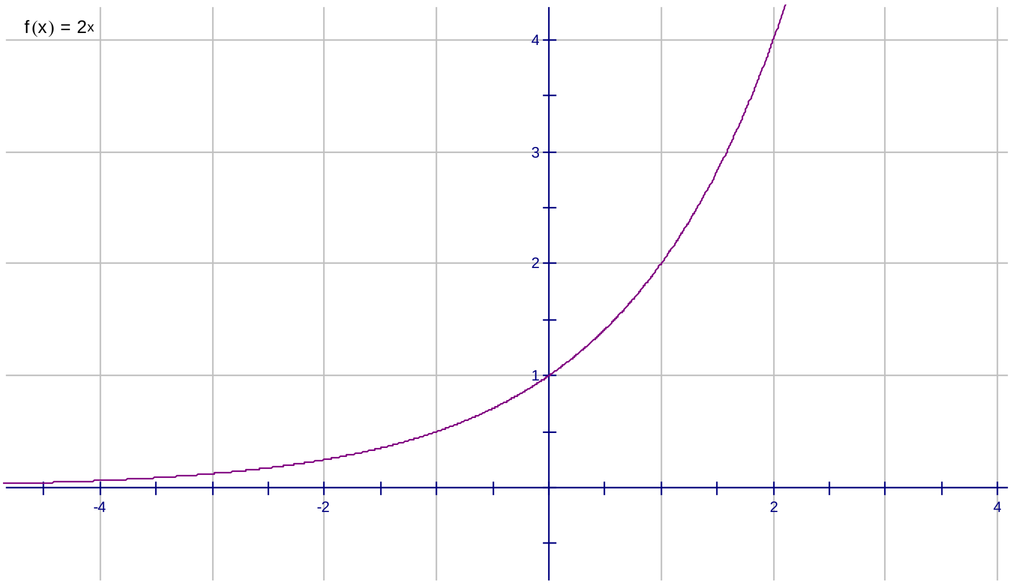


Мы видим, что любое значение, которое принимает экспонента, она принимает ровно один раз. Действительно, чем больше становится аргумент x, тем больше значение функции e^x. Значит, обратная функция должна существовать. Где она определена? Экспонента принимает любые положительные значения. Значит, множество положительных чисел и будет областью определения этой функции. Какой смысл функции, обратной экспоненте? Итак, если

$$y = e^x$$

то x – это такая степень, в которую нужно возвести число e, чтобы получилось y. Для такого числа есть специальное обозначение $x = \log_e y$. Эта формула читается «x логарифм y по основанию e». Как обычно, прежде чем делать наблюдения и выводы для экспоненты $y = e^x$, начнём работать с более близкой и понятной нам функцией

$$y = 2^x$$



Функция $y = 2^x$ удобна тем, что мы можем составить таблицу её значений, используя лишь простую арифметику

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
2^x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

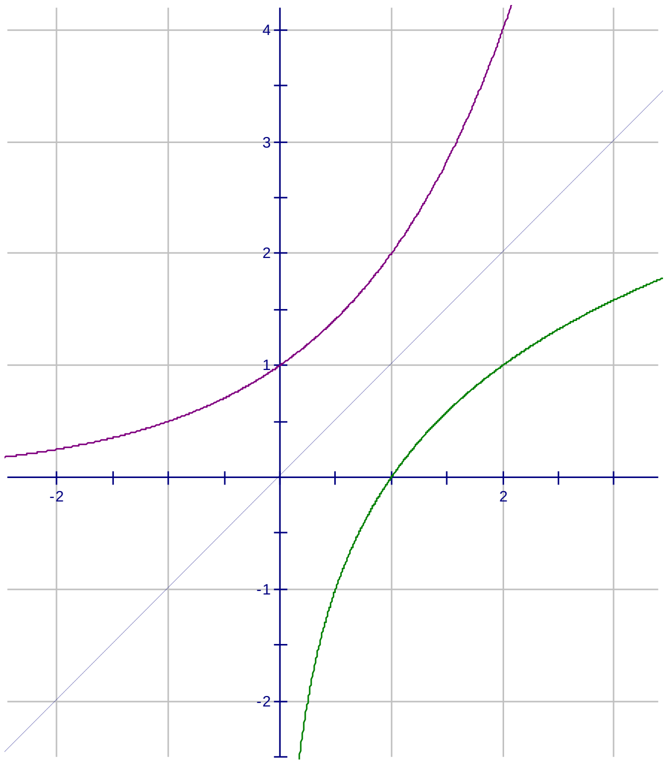
Используя эту таблицу, мы можем узнать значения обратной функции в некоторых точках.

x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
$\log_2 x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

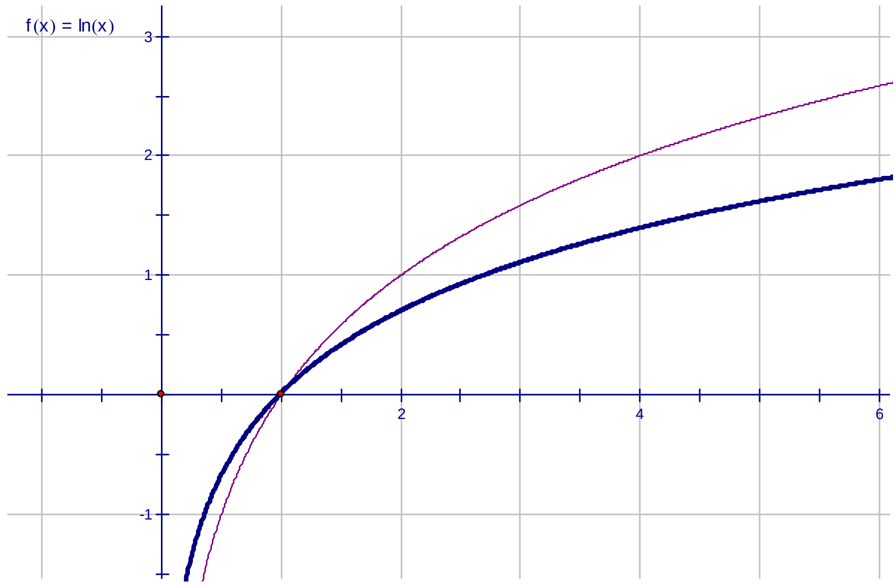
Функцию, обратную функции $y = 2^x$ обозначают $\log_2 x$, читается «логарифм x по основанию 2». Смысл этой функции таков: в какую степень нужно возвести число 2, чтобы получить x. Если мы посмотрим на таблицу для обратной функции, то увидим, что именно на этот вопрос отвечают числа во второй строке таблицы.

Мы видим, что пока аргумент функции x меньше единицы, функция растёт очень быстро, а потом её рост наоборот становится очень медленным. Тем не менее, на всей области определения функция монотонно возрастает – чем больше аргумент функции x, тем больше значение функции $\log_2 x$.

Как мы помним, график обратной функции симметричен графику функции относительно прямой $y = x$.



Вернёмся к функции, обратной стандартной экспоненте. Так же как график функции $y = e^x$ похож на график функции $y = 2^x$, так и график функции $y = \log_2 x$ похож на график функции $y = \log_e x$.



Так же как функция $y = e^x$ очень важна в математике и прикладных науках, логарифм по основанию e тоже очень важен для нас, является особой функцией. Чаще всего мы пользуемся именно логарифмом по основанию e, а не какому-нибудь другому, поэтому для функции $y = \log_e x$ есть даже специальное, более короткое обозначение. Вместо того чтобы писать $y = \log_e x$ обычно пишут $y = \ln x$, формула читается «y равен натуральному логарифму x».