

Факультет прикладной политологии, 2011-12 уч. год.

Дополнительные главы алгебры и анализа

Задачи для тренировки — 1 (12 мая 2012 г.)

И. А. Хованская, И. В. Щуров, Ю. Г. Кудряшов, П. Ф. Соломатин, К. И. Сонин (РЭШ)

1. Преобразование графиков функций

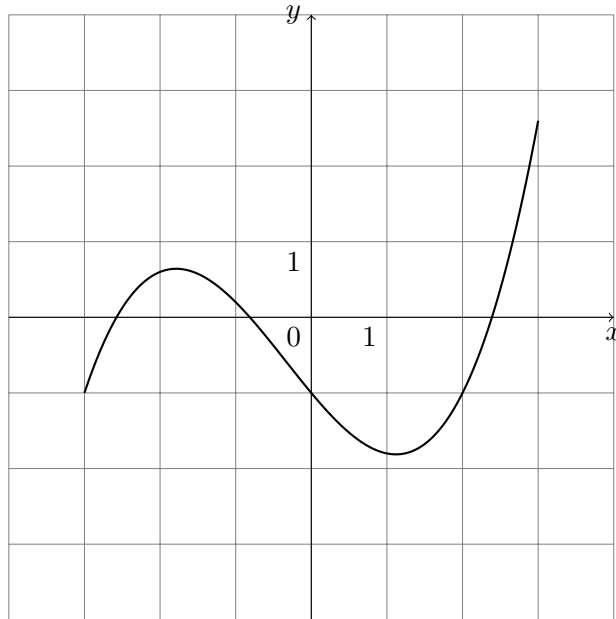


Рис. 1: Рисунок к задаче 1

Задача 1. На рисунке 1 изображен график функции $y = f(x)$. Пусть $g(x) = f(3x)$. Чтобы построить график функции $y = g(x)$, сделайте следующее:

- По графику, найдите (примерно) значение функции f в точках $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Составьте таблицу значений f в этих точках. Отметьте соответствующие точки на графике.
- Заметим, что $g(1) = f(3 \cdot 1) = f(3)$. Найдите значение $g(1)$. Отметьте соответствующую точку, лежащую на (еще не построенном) графике функции $y = g(x)$.
Напоминание. Точка, соответствующая значению $g(1)$ будет иметь координату x , равную 1 (аргументу функции) и координату y , равную $g(1)$ (значению функции).
- Найдите значение $g(-1)$. Отметьте соответствующую точку на графике функции $y = g(x)$.

Замечание. Мы могли бы построить точку, соответствующую $g(1)$, не находя численного значения $f(3)$. Действительно, посмотрим на точку, соответствующую $f(3)$ на графике $y = f(x)$ (пусть это точка A). Точка, соответствующая $g(1)$ (пусть это точка B), должна иметь такую же y -координату, то есть лежать на той же горизонтальной прямой, однако её x -координата должна быть равна 1, а не 3. То есть чтобы получить точку B на графике $y = g(x)$, нужно соответствующую точку A на графике $y = f(x)$ сдвинуть к оси Oy , уменьшив её y -координату втрое.

- (d) Для каких значений x мы можем найти значение $g(x)$ по таблице, построенной в пункте а? Найдите значения $g(x)$ в этих точках. Постройте соответствующие точки на графике $y = g(x)$. Какие точки с графика $f(x)$ переходят в построенные точки? Как меняются их координаты? Как меняется весь график функции?
- (e) Постройте график функции $y = g(x)$.

Задача 2. Для той же функции $f(x)$, построить графики следующих функций (при необходимости, проведите такой же анализ, как и в предыдущей задаче: найдите значение функции $f(x)$ в нескольких точках, проанализируйте, значение функции $g(x)$ в каких точках можно найти, используя вычисленные значения; найдите их, построьте соответствующие точки на графиках $y = f(x)$ и $y = g(x)$, установите, как связаны координаты этих точек, и что происходит с графиком).

- (a) $y = f(3x)$;
 (b) $y = 3f(x)$;
 (c) $y = f(x)/3$;
 (d) $y = f(3x) + 2$;
 (e) $y = f(3x + 2)$;
 (f) $y = f(x/3 - 3)$;
 (g) $y = 3f(x) + 1$;
 (h) $y = 3f(x + 1)$;
 (i) $y = 3f(x/2 - 1)$.

2. Пределы и непрерывность

Задача 3. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 0 \\ -x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

- (a) Найти значение функции $f(x)$ в точках $x = -2, -1, 0, 1, 2$.
 (b) Постройте график этой функции.
 (c) Найдите пределы, если они существуют: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
 (d) Является ли функция $f(x)$ непрерывной в точке 0?

Задача 4. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 0 \\ x^2 - 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

- (a) Найти значение функции $f(x)$ в точках $x = -2, -1, 0, 1, 2$.
 (b) Постройте график этой функции.
 (c) Найдите пределы, если они существуют: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
 (d) Является ли функция $f(x)$ непрерывной в точке 0?

3. Экспонента и логарифм

Задача 5. В процессе радиоактивного распада количество некоторого радиоактивного вещества уменьшается вдвое каждые 10 лет (это так называемый «период полураспада»). Известно, что 1 января 2010 года этого вещества в некотором контейнере составляло 400 г. Будем считать, что это вещество было помещено в контейнер когда-то очень давно, и с этого момента контейнер никто не открывал, и никогда не будет открывать.

- (a) Сколько вещества было в контейнере в 2000 году (на начало года)? В 1990 году?
- (b) Сколько вещества будет в контейнере в 2020 году? В 2030 году?
- (c) Пусть в начале года t в контейнере было $f(t)$ грамм вещества. Из условия следует, что $f(2010) = 400$. Выписать формулу для $f(t)$ для произвольного года t .
- (d) Выписать формулу для функции $f^{-1}(x)$, обратной к функции $f(t)$.
- (e) В какой момент времени (примерно) в контейнере будет 1600 г вещества? 2 кг вещества?