Домашнее Задание №5

Дмитрий Сорокин

19 Апреля 2012

Задача №4

Рассмотрим подпространство $L \subset \mathbb{R}^7$, являющееся линейной оболочкой векторов

$$v_1 = (3,3,1,0,2,0,0)\ v_2 = (3,2,3,-3,2,-1,2)\ v_3 = (-3,-1,-5,6,-2,2,-4)\ v_4 = (9,4,13,-15,6,-5,10)$$

a. Доказать, что векторы v_1, v_2 образуют базис пространства L.

Решение:

Для начала отметим, что эти векторы линейно независимы, так как наличие нулевой координаты в первом векторе гарантирует невозможность выразить его через второй равно как и невозможность выразить второй вектор через него. Теперь для доказательство того, что данные векторы образуют базис, достаточно предъявить разложение оставшихся двух векторов через v_1, v_2:

$$v_3 = v_1 - 2v_2,\ v_4 = -2v_1 + 5v_2$$

Теперь любой вектор v из пространства L, представимый по определению в виде $v = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i v_i$, может быть представлен в виде линейной комбинации первых двух линейно независимых векторов, что равносильно утверждению, которое требуется доказать.

b. Пусть отображение h задано следующим образом:

$$h(v_1) = v_1 - 3v_2,\ h(v_3) = -5v_3 - v_4,\ h(v_4) = 8v_1 - 14v_2$$

Докажите, что оператор с такими свойствами существует и определен однозначно. Запишите матрицу A этого оператора в базисе v_1, v_2.

Решение:

Рассмотрим оператор $h : L \to \mathbb{R}^7$, такой, что $h(v_1) = v_1 - 3v_2$ и $h(v_2) = 2v_1 - 4v_2$. Поскольку любой вектор в пространстве однозначно задается в виде $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$, то и отображение данного вектора (в силу линейности) будет однозначно задаваться выражением $h(v) = \alpha_1 h(v_1) + \alpha_2 h(v_2)$. Нетрудно убедиться, что данные в условии значения $h(v_3)$ и $h(v_4)$ не противоречат предложенному варианту отображения h, что подтверждает существование искомого отображения:

$$h(v_3) = h(v_1 - 2v_2) = -3v_1 + 5v_2 = -5(v_1 - 2v_2) - (2v_1 + 5v_2) = -5v_3 - v_4$$

$$h(v_4) = h(-2v_1 + 5v_2) = -2(v_1 - 3v_2) + 5(2v_1 - 4v_2) = 8v_1 - 14v_2$$

Матрица оператора A содержит в своих столбцах образы векторов v_1, v_2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

c. Существует ли базис пространства L, в котором матрица оператора L диагональна? Если да, то найдите этот базис, выразите векторы этого базиса через векторы v_1, v_2 и векторы стандартного базиса $\mathbb{R}^7$.

Решение:

Для отыскания такого базиса найдем корни характеристического многочлена:

$$\chi(A) = -(1-\lambda)(4+\lambda)+6 = 0 \iff \lambda_{1,2} = -1, -2$$

Два собственных значения позволяют найти два линейно независимых вектора, которые и образуют базис:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Одним из решений является вектор $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = v_1 - v_2$; он войдет в базис. Второй вектор найдем, решая второе матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Одним из решений является вектор $a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 2v_1 - 3v_2$. Таким образом, мы нашли два собственных вектора, образующих базис, в котором матрица A принимает диагональный вид. Выразить эти векторы через стандартные базисные векторы $\mathbb{R}^7$ не составляет труда:

$$a_1 = v_1 - v_2 = (3,3,1,0,2,0,0) - (3,2,3,-3,2,-1,2) = (0,1,-2,3,0,1,-2)$$
$$a_2 = 2v_1 - 3v_2 = 2e_1 - v_2 = (-3,0,-7,9,-2,3,-6)$$

d. Представьте матрицу A в виде $A = CBC^{-1}$, где B– диагональная матрица, C – некоторая невырожденная матрица.

Решение:

Известно, что для решения задачи требуется лишь найти матрицу перехода от базиса v_1, v_2 к базису a_1, a_2 и обратную матрицу перехода. Матрица перехода к "новому" базису находится после выражения векторов v_1, v_2 через векторы a_1, a_2:

$$\begin{cases} a_1 = v_1 - v_2 \\ a_2 = 2v_1 - 3v_2 \end{cases} \iff \begin{cases} v_1 = 3a_1 - a_2 \\ v_2 = 2a_1 - a_2 \end{cases}$$

Таким образом, матрица перехода из "старого" базиса в "новый" (она же матрица C^{-1}) имеет вид:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

В итоге получаем, что матрица A представима в следующем виде:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

e. Дополните набор векторов v_1, v_2 до базиса пространства $\mathbb{R}^7$

Решение:

Покажем, что набор векторов $v_1, v_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$ является базисом пространства $\mathbb{R}^7$. Для этого запишем все эти векторы строками в одну большую матрицу и применим метод Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Можно видеть, что элементарными преобразованиями мы привели систему из семи векторов к виду, в котором очевидна их линейная независимость: определитель матрицы из этих семи векторов не равен 0. Любые семь линейно независимых векторов в $\mathbb{R}^7$ образуют базис.

f. Постройте какое-нибудь отображение $f\colon \mathbb{R}^7 \to L$ такое, что $\operatorname{Im} f = L$ и

$$f(v_1) = v_1 - 3v_2,\ f(v_3) = -5v_3 - v_4,\ f(v_4) = 8v_1 - 14v_2$$

Решение:

Рассмотрим оператор f, который переводит все векторы e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 в нулевой вектор, а для векторов v_1, v_2 работающего следующим образом: $f(v_1) = v_1 - 3v_2, f(v_2) = 2v_1 - 4v_2$. Поскольку указанные семь векторов являются базисом в $\mathbb{R}^7$, то построенное отображение отображает все пространство действительных семизначных строк. Более того, любой вектор переходит в некоторую линейную комбинацию векторов v_1 и v_2, которые являются базисом в L, т.е. оператор не может выйти за пределы L. Покажем, что образом оператора является именно все пространство L:

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \sum_{i=2}^{7} \alpha_i e_i) = \alpha_1(v_1 - 3v_2) + \alpha_2(2v_1 - 4v_2) = (\alpha_1 + 2\alpha_2)v_1 - (3\alpha_1 + 4\alpha_2)v_2$$

Нетрудно убедиться в том, что меняя параметры α_1 и α_2 мы можем получить любую комбинацию векторов v_1 и v_2, т.е. образом оператора является все пространство. Остается лишь проверить, что оператор переводит векторы v_3 и v_4 в те вектора, которые записаны в условии, однако эту работу мы уже проделали в пункте b. В довершение можно сказать, что матрица найденного оператора будет иметь следующий вид:

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

g. Найдите ядро этого отображения

Решение:

Простым перемножением матриц получаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Иными словами, ядром отображения составляют векторы вида $(0, 0, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$.

h. Найдите матрицу этого отображения в стандартном базисе $\mathbb{R}^7$.

Решение:

Из пункта e. можно увидеть, что векторы e_1 и e_2 представляются в виде следующих линейных комбинаций:

$$e_1 = -\frac{2}{3}v_1 + v_2 + \sum_{i=2}^{7} \alpha_i e_i; \quad e_2 = v_1 - v_2 + \sum_{i=2}^{7} \beta_i e_i$$

Нам не важно знать, какую именно комбинацию последних пяти базисных векторов надо взять, так как при отображении все эти коэффициенты все равно обнулятся. Найдем образы векторов e_1 и e_2:

$$f(e_1) = -\frac{2}{3}f(v_1) + f(v_2) = \frac{4}{3}v_1 - 2v_2;\ f(e_2) = f(v_1) - f(v_2) = -v_1 + v_2$$

Поскольку мы знаем координаты векторов v_1 и v_2 в стандартном базисе, то остается только записать новую матрицу отображения:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -14/3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача №5

Пусть векторы e_1, e_2, e_3, e_4 составляют базис пространства M. Рассмотрим линейный оператор f, действующий следующим образом:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= -18e_1 + 3e_2 + e_3 + 7e_4, & f(e_2) &= 67e_1 - 11e_2 - 4e_3 - 26e_4, \\ f(e_3) &= 170e_1 - 28e_2 - 10e_3 - 66e_4, & f(e_4) &= 237e_1 - 39e_2 - 14e_3 - 92e_4 \end{aligned}$$

a. Найдите все векторы $v \in M$ такие, что $f(v) = -474e_1 + 78e_2 + 28e_3 + 184e_4$

Решение:

Запишем матрицу данного отображения:

$$A_f = \begin{pmatrix} -18 & 67 & 170 & 237 \\ 3 & -11 & -28 & -39 \\ 1 & -4 & -10 & -14 \\ 7 & -26 & -66 & -92 \end{pmatrix}$$

Для отыскания всех векторов, отображаемых в искомый вектор, запишем матричное уравнение и решим соответствующую ему систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} -18 & 67 & 170 & 237 \\ 3 & -11 & -28 & -39 \\ 1 & -4 & -10 & -14 \\ 7 & -26 & -66 & -92 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -474 \\ 78 \\ 28 \\ 184 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -18 & 67 & 170 & 237 & -474 \\ 3 & -11 & -28 & -39 & 78 \\ 1 & -4 & -10 & -14 & 28 \\ 7 & -26 & -66 & -92 & 184 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Как видно, данная система хорошо решается. Выражая главные переменные через побочные, получаем решение:

$$\begin{cases} x_1 = 4 + 2x_3 + 2x_4 \\ x_2 = -6 - 2x_3 - 3x_4 \end{cases}$$

Все векторы вида (x_1, x_2, x_3, x_4), удовлетворяющие этому решению, переходят под действием оператора f в искомый вектор.

b. Найдите все векторы $v \in M$ такие, что $f(v) = -475e_1 + 76e_2 + 29e_3 + 182e_4$

Решение:

Для отыскания всех векторов, отображаемых в искомый вектор, запишем матричное уравнение и решим соответствующую ему систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} -18 & 67 & 170 & 237 \\ 3 & -11 & -28 & -39 \\ 1 & -4 & -10 & -14 \\ 7 & -26 & -66 & -92 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -475 \\ 76 \\ 29 \\ 182 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -18 & 67 & 170 & 237 & -475 \\ 3 & -11 & -28 & -39 & 76 \\ 1 & -4 & -10 & -14 & 29 \\ 7 & -26 & -66 & -92 & 182 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Нетрудно заметить, что данная система уравнений не имеет решений, так как система решается лишь в случае, когда $0 = 1$, что невозможно. Таким образом, не существует ни одного вектора, который бы под действием отображения переходил в вектор $-475e_1 + 76e_2 + 29e_3 + 182e_4$.

Задача №7

Найдите A^{33}, где

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 12 \\ -4 & 9 & 14 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Решение:

Пусть матрица A является матрицей некоторого линейного оператора в некотором базисе. Запишем характеристический многочлен данного оператора и найдем собственные значения:

$$\chi(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 + 1) = -\lambda(\lambda + i)(\lambda - i)$$

Поскольку у нас есть три различных собственных значения, то мы можем найти базис из собственных векторов и записать матрицу оператора A в координатах относительно этого базиса:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

Найдем, как будет выглядеть матрица $(A')^{33}$:

$$(A')^{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i)^{33} & 0 \\ 0 & 0 & (-i)^{33} \end{pmatrix}$$

К счастью, степени мнимой единицы повторяются с некоторым периодом:

$$i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, \ldots, i^{32} = 1, i^{33} = i$$
$$(-i)^2 = -1, (-i)^3 = i, (-i)^4 = 1, (-i)^5 = -i, \ldots, (-i)^{32} = 1, -i^{33} = -i$$

Выходит, что возведенная в 33 степень матрица A' равна самой себе! Отсюда получается, что и исходная матрица в 33 степени равна самой себе:

$$A^{33} = (CA'C^{-1})^{33} = C{A'}^{33}C^{-1} = CA'C^{-1} = A$$

Задача №8

Рассмотрим числовую последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, элементы которой для всех $n > 3$ удовлетворяют соотношению

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{pmatrix},$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Найдите A^n.

Решение:

Запишем характеристический многочлен для данной матрицы:

$$\chi(\lambda) = -(\lambda - 3)(\lambda + 1)(\lambda + 2) \Longrightarrow \lambda_{1,2,3} = 3, -1, -2$$

Получается, что в некотором базисе матрица A имеет диагональный следующий вид:

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Соответствующие этим собственным значения собственные векторы имеют вид:

$$h_1 = (9, 3, 1), h_2 = (1, -1, 1), h_3 = (4, -2, 1)$$

Для поиска матрицы перехода надо решить следующее матричное уравнение:

$$T^{-1} \times T = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В левой матрице по столбцам записаны координаты векторов h_i относительно исходного базиса. Матрица T содержит в столбцах координаты стандартных базовых векторов через новые три. Найдем ее:

$$T = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -5 & 5 & 30 \\ 4 & -8 & -12 \end{pmatrix}$$

В итоге имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -5 & 5 & 30 \\ 4 & -8 & -12 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -5 & 5 & 30 \\ 4 & -8 & -12 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}(-1)^n + \frac{1}{5}(-1)^n 2^{n+2} + \frac{3^{n+2}}{20} & \frac{(-1)^n}{4} - \frac{1}{5}(-1)^n 2^{n+3} + \frac{3^{n+3}}{20} & \frac{3(-1)^n}{2} - \frac{3}{5}(-1)^n 2^{n+2} + \frac{3^{n+2}}{10} \\ \frac{(-1)^n}{4} - \frac{1}{5}(-1)^n 2^{n+1} + \frac{3^{n+1}}{20} & -\frac{1}{4}(-1)^n + \frac{1}{5}(-1)^n 2^{n+2} + \frac{3^{n+2}}{20} & \frac{1}{2}(-3)(-1)^n + \frac{3}{5}(-1)^n 2^{n+1} + \frac{3^{n+1}}{10} \\ \frac{(-2)^n}{5} - \frac{(-1)^n}{4} + \frac{3^n}{20} & \frac{(-1)^n}{4} - \frac{1}{5}(-1)^n 2^{n+1} + \frac{3^{n+1}}{20} & \frac{1}{5}(-3)(-2)^n + \frac{3(-1)^n}{2} + \frac{3^n}{10} \end{pmatrix}$$

b. Выразите a_n через a_1, a_2, a_3.

Решение:

Заметим, что

$$\begin{pmatrix} a_4 \\ a_3 \\ a_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix},$$

Более того,

$$\begin{pmatrix} a_5 \\ a_4 \\ a_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_4 \\ a_3 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

Из этих двух результатов можно получить, что

$$\begin{pmatrix} a_5 \\ a_4 \\ a_3 \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix},$$

Нетрудно догадаться, что таким образом мы можем действовать сколько угодно. В итоге получаем:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = A^{n-3} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix},$$

Подставляя вместо A^{n-3} найденный в предыдущем пункте результат и проведя умножение, получим искомый результат.

Задача №9

Оператор f в стандартном базисе записывается матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Найдите матрицу этого оператора в базисе

$$v_1 = (1, 1, -2), v_2 = (-1, 0, 1), v_3 = (-1, 0, 2)$$

Решение:

Нам известно, что верна следующая система:

$$\begin{cases} v_1 = & e_1 & +e_2 & -2e_3 \\ v_2 = & -e_1 & & +e_3 \\ v_3 = & -e_1 & & +2e_3 \end{cases}$$

Полезным будет разрешить эту систему относительно векторов e_1, e_2, e_3

$$\begin{cases} v_1 = & e_1 & +e_2 & -2e_3 \\ v_2 = & -e_1 & & +e_3 \\ v_3 = & -e_1 & & +2e_3 \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 = & & -2v_2 & +v_3 \\ e_2 = & v_1 & & +v_3 \\ e_3 = & & -v_2 & +v_3 \end{cases}$$

Зная выражения для всех векторов старого базиса мы легко можем найти образы новых базисных векторов, выраженные через эти самые векторы:

$$f(v_1) = f(e_1) + f(e_2) - 2f(e_3) = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$f(v_2) = -f(e_1) + f(e_3) = -\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$f(v_3) = -f(e_1) + 2f(e_3) = -\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Мы знаем образы новых базисных векторов при отображении f, но теперь нам требуется найти координаты этих векторов относительно векторов v_1, v_2, v_3. Для этого воспользуемся решенной нами системой, запишем матрицу перехода T и умножим матрицу из образов на матрицу перехода для получения итогового ответа. Матрица перехода имеет вид:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Итоговый ответ:

$$A' = T \times (f(v_1)|f(v_2)|f(v_3)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

b. Найдите A^n

Решение:

Мы знаем матрицу перехода из стандартного базиса к базису, в котором матрица оператора A представлена в жордановой нормальной форме. Это значит, что матрица A может быть представлена в виде:

$$A = T^{-1} A' T,$$

где A' и T – матрицы из предыдущего пункта. Для возведения в степень n достаточно уметь возводить в степень n матрицу A', а также знать матрицу T^{-1}.

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Возведем матрицу A' в степень n. Очевидно, что при $n = 0$ получим нулевую матрицу, $n = 1$ – саму матрицу A. При $n = 2$ получим:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

При больших n распишем нашу матрицу как сумму диагональной и матрицы нильпотентного оператора и воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$(A')^n = \left(\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^n = \sum_{k=0}^{n} \left[C_n^k \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{n-k} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^k \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} + C_n^1 \begin{pmatrix} 0 & (-2)^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + C_n^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & (-2)^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{n-2} = \begin{pmatrix} (-2)^n & n(-2)^{n-1} & \frac{1}{2}(n^2 - n)(-2)^{n-2} \\ 0 & (-2)^n & n(-2)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$$

Мы подсчитали матрицу A'^n. Умножая ее на матрицу перехода и обратную к ней с двух сторон мы получим искомую матрицу:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (-2)^n & n(-2)^{n-1} & \frac{1}{2}(n^2 - n)(-2)^{n-2} \\ 0 & (-2)^n & n(-2)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{lll} -(-2)^{n-1}n - (-2)^n - 2\left((-2)^{n-1}n - (-2)^n\right) + 0.5(-2)^{n-2}\left(n^2 - n\right) & 0.5(-2)^{n-2}\left(n^2 - n\right) - (-2)^{n-1}n & 0.5(-2)^{n-2}\left(n^2 \right. \\ 0.5(-2)^{n-2}\left(n^2 - n\right) - (-1)^{n-1}2^n n & 0.5(-2)^{n-2}\left(n^2 - n\right) + (-2)^n & 0.5(-2)^{n-2}\left(n^2 \right. \\ (-2)^{n-1}n + (-1)^n 2^{n+1} - 2\left((-2)^n - (-1)^{n-1}2^n n\right) - 1.(-2)^{n-2}\left(n^2 - n\right) & (-2)^{n-1}n - 1.(-2)^{n-2}\left(n^2 - n\right) & (-2)^{n-1}n + (- \end{array} \right.$$

К сожалению, данная матрица не влезает в страницу. Вы можете посчитать ее в Wolfram Alpha.

Задача №10

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 6 \\ -2 & 6 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдите $P(A)$, где $P(x) = (x-5)^3(x-2)^2(x-1)^2$

Решение:

Найдем характеристический многочлен матрицы A:

$$\chi(\lambda) = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$$

По теореме Гамильтона-Кейли данный многочлен при подстановке на место λ матрицы A должен непременно обнулиться, т.е. $\chi(\lambda) = 0$. Но искомый нами многочлен $P(A) = \chi(\lambda)\times(-1)(A-5E)^3(A-E))$, из чего заключаем, что он тоже обратится в нулевую матрицу.