Домашнее Задание № 6

Дмитрий Сорокин

Совместный Бакалавриат ВШЭ-РЭШ

30 Мая 2012

Гомер воспел сражение под Троей,
Люди помнят об Аяксе и о Гекторе.
Но забыты безымянные герои,
Погибавшие под натисками векторов.

Как, скажите, вырваться из круга?
На глазах усталого пиита
Перемножились скалярно друг на друга,
Дети капитана Грамма-Шмидта.

Мне на пятом показалось — кончу!
Жизнь моя! Остановись! Постой!
Но заснул прохладной майской ночью,
Так не отнормировав шестой.

Задача №1

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^6$. Скалярное произведение векторов $u = (x_1, x_2, \ldots, x_6)$ и $v = (y_1, y_2, \ldots, y_6)$ задается формулой

$$< u, v >= x_1 y_1 + \ldots + x_6 y_6$$

Длина вектора u задается формулой

$$|u|^2 =< u, u >$$

Пусть L – линейное подпространство, порожденное векторами

$$v_1 = (-3, 1, -2, 3, 0, 0),\ v_2 = (-1, 0, -1, -3, 2, 1),$$

$$v_3 = (3, -3, 2, 1, -1, -3),\ v_4 = (5, -5, 4, 11, -6, -8)$$

a. *Пусть вектор $h_1 = \lambda v_1$ таков, что $|h_1| = 1$. Найдите этот вектор. Покажите, что пространство, порожденное h_1, v_2, v_3, v_4 совпадает с L.*

Решение:

Из условия задачи $|h_1|^2 = 1 \implies < h_1, h_1 >= 1 \implies < \lambda v_1, \lambda v_1 >= 1 \implies \lambda^2 |v_1|^2 = 1.$

$$23\lambda^2 = 1 \implies \lambda = \frac{1}{\sqrt{23}} \implies \boxed{h_1 = \left(\frac{-3}{\sqrt{23}}, \frac{1}{\sqrt{23}}, \frac{-2}{\sqrt{23}}, \frac{3}{\sqrt{23}}, 0, 0\right)}$$

Здесь было использовано “знание” того, что стандартное скалярное произведение является билинейной формой.
Рассмотрим некоторый вектор $x \in \mathrm{Lin}(v_1, v_2, v_3, v_4)$. Поскольку $\lambda \neq 0$, это эквивалентно записи

$$x = \sum_{k=1}^{4} \alpha_k v_k = \frac{\lambda}{\lambda}\alpha_1 v_1 + \sum_{k=2}^{4} \alpha_k v_k = \frac{\alpha_1}{\lambda} h_1 + \sum_{k=2}^{4} \alpha_k v_k \iff x \in \mathrm{Lin}(h_1, v_2, v_3, v_4)$$

b. *Покажите, что любой вектор вида $\alpha h_1 + v_2$ лежит в подпространстве, порожденном векторами v_1, v_2.*

Решение:

$$x = \alpha h_1 + v_2 = \alpha\lambda v_1 + v_2 \implies x \in \mathrm{Lin}(v_1, v_2)$$

c. *Найдите, если существует, вектор h_2', вида $\alpha h_1 + v_2$, ортогональный вектору h_1. Используйте условие ортогональности, то есть равенства нулю скалярного произведения $< h_2', h_1 >$, как условие на α. Если вектор $h_2' \neq 0$, найдите такой вектор $h_2 = \mu h_2'$, что $|h_2| = 1$.*

Решение:

Запишем условие на параметр α:

$$< h_2', h_1 >=< \alpha h_1 + v_2, h_1 >= \alpha < h_1, h_1 > + < v_2, h_1 >= \alpha + \lambda < v_2, v_1 >= \alpha - 4\lambda$$

$$< h_2', h_1 >= 0 \iff \alpha - 4\lambda = 0 \iff \alpha = 4\lambda = \frac{4}{\sqrt{23}}$$

Отсюда получаем, что

$$h_2' = \frac{4}{\sqrt{23}} h_1 + v_2 = \left(-\frac{12}{23}, \frac{4}{23}, -\frac{8}{23}, \frac{12}{23}, 0, 0\right) + v_2 = \left(-\frac{35}{23}, \frac{4}{23}, -\frac{31}{23}, -\frac{57}{23}, 2, 1\right)$$

Отнормируем этот вектор. Аналогично пункту а., получаем, что

$$h_2 = \mu h_2', \text{ где } \mu = \frac{1}{|h_2'|} = \frac{1}{\sqrt{< h_2', h_2' >}} = \sqrt{\frac{23}{352}}$$

$$\Downarrow\Downarrow$$

$$\boxed{h_2 = \left(-\frac{35}{4\sqrt{506}}, \frac{1}{\sqrt{506}}, -\frac{31}{4\sqrt{506}}, -\frac{57}{4\sqrt{506}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{23}{22}}, \frac{1}{4}\sqrt{\frac{23}{22}}\right)}$$

d. *Докажите, что набор векторов $\{h_1, h_2\}$ порождает то же подпространство, что и векторы v_1, v_2, и образует в нем ортонормированный базис.*

Решение:

По построению векторы h_1, h_2 имеют длину один, т.е. являются нормированными. Покажем, что они ортогональны:

$$< h_1, h_2 >=< h_1, \mu h_2' >= \mu < h_1, h_2' >= 0$$

так как по построению $< h_2', h_1 >= 0$ и скалярное произведение симметрично. Заметим, что из ортогональности следует линейная независимость этих векторов: если мы докажем, что их линейная оболочка совпадает с линейной оболочкой v_1, v_2, то мы докажем, что $\{h_1, h_2\}$ является ортонормированным базисом в этой оболочке.

$$x = \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 = \alpha_1 \lambda v_1 + \alpha_2 \mu h_2' = \alpha_1 \lambda v_1 + \alpha_2 \mu (\alpha \lambda v_1 + v_2) = c_1 v_1 + c_2 v_2$$

Равносильность всех преобразований преобразований показывает, что любой вектор, принадлежащий одной линейной оболочке, обязательно принадлежит другой, из чего следует, что эти оболочки совпадают.

f. *Докажите, что любой вектор вида $\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + v_3$ лежит в линейной оболочке векторов v_1, v_2, v_3.*

Решение:

Поскольку векторы $\{h_1, h_2\}$ образуют то же пространство, что и векторы $\{v_1, v_2\}$, то любой вектор вида $\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + v_3$ можно представить в виде $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + v_3$.

g. *Найдите такой ненулевой вектор h_3' вида $\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + v_3$, что он ортогонален векторам h_1 и h_2. Используйте условие ортогональности как условие на λ_1 и λ_2. Если такой ненулевой вектор существует, найдите вектор $h_3 = \eta h_3'$, что $|h_3| = 1$.*

Решение:

Применяя условия ортогональности, получаем

$$< h_3', h_1 >=< \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + v_3, h_1 >= \lambda_1 < h_1, h_1 > +\lambda_2 < h_2, h_1 > + < v_3, h_1 >$$

Поскольку $|h_1| = 1$ и векторы h_1, h_2 ортогональны, то $< h_3', h_1 >= \lambda_1 + < v_3, h_1 >= 0 \Rightarrow$

$$\lambda_1 + \lambda < v_3, v_1 >= 0 \implies \lambda_1 = \frac{13}{\sqrt{23}}$$

Аналогично,

$$< h_3', h_2 >=< \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + v_3, h_2 >= \lambda_1 < h_1, h_2 > +\lambda_2 < h_2, h_2 > + < v_3, h_2 >$$

$$\Downarrow\Downarrow$$

$$\lambda_2 + \mu < v_3, \alpha h_1 + v_2 >= \lambda_2 + \mu\alpha\lambda < v_3, v_1 > +\mu < v_3, v_2 >= \lambda_2 - 13\mu(\alpha\lambda + 1) = 0$$

$$\Downarrow\Downarrow$$

$$\lambda_2 = 13\mu(4\lambda^2 + 1) = 13\sqrt{\frac{23}{352}}\frac{27}{23} = \frac{351}{4\sqrt{506}}$$

Проведя вычисления и нормализовав полученный вектор, имеем

$$h_3' = \left(-\frac{75}{352}, -\frac{199}{88}, -\frac{167}{352}, \frac{79}{352}, \frac{175}{176}, -\frac{705}{352}\right)$$

$$\boxed{h_3 = \frac{1}{4\sqrt{80\,806}}(-75, -995, -167, 79, 350, -705)}$$

h. *Докажите, что набор векторов h_1, h_2, h_3 образует ортонормированный базис в подпространстве, порожденном векторами v_1, v_2, v_3.*

Решение:

По построению, все три вектора h_1, h_2, h_3 взаимно ортогональны (и, следовательно, линейно независимы) и при этом отнормированы. Кроме того, мы знаем, что $\mathrm{Lin}(h_1, h_2) = \mathrm{Lin}(v_1, v_2)$. Поскольку $\exists\, \beta : h_3 = \beta h_3' = \beta(\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + v_3) \implies h_3 \in \mathrm{Lin}(h_1, h_2, v_3) = \mathrm{Lin}(v_1, v_2, v_3)$. Но раз h_1, h_2, h_3 принадлежат линейной оболочке векторов v_1, v_2, v_3 и линейно независимы, то они являются базисом в этой линейной оболочке и порожденное ими пространство совпадет с $\mathrm{Lin}(v_1, v_2, v_3)$.

i. *Продолжая процесс, найдите ортонормированный базис в L*

Решение:

Ранее мы показали, что в системе векторов $\{v_1, v_2, v_3\}$ можно выделить три попарно ортогональных вектора, из чего следует, что размерность этого пространства равна 3. Однако, вектор v_4 выражается через все остальные, так как матрица, i-ой строкой которой является вектор v_i, после упрощения по Гаусу принимает вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 & 4.5 & 3.5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0.5 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 14 & -6.5 & -4.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Выходит, что векторы h_1, h_2, h_3 уже составляют ортонормированный базис в L.

j. *Дополните построенный набор до ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^6$.*

Решение:

Дополним набор векторами $v_4 = (1, 0, 0, 0, 0, 0), v_5 = (0, 1, 0, 0, 0, 0), v_6 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$. Аналогично предыдущему пункту, можно применить метод Гаусса и убедиться в том, что эти шесть векторов линейно независимы. Продолжим процесс ортогонализации.

$$< h_4', h_i >=< \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + \lambda_3 h_3 + v_4, h_i >= \lambda_i + < v_4, h_i >= 0$$

$$\Downarrow\Downarrow$$

$$\lambda_1 = \frac{3}{\sqrt{23}},\ \lambda_2 = \frac{35}{4\sqrt{506}},\ \lambda_3 = \frac{75}{4\sqrt{80\,806}}$$

$$\Downarrow\Downarrow$$

$$h_4' = \left(\frac{1664}{3673}, \frac{116\,371}{1\,292\,896}, -\frac{1486}{3673}, \frac{549}{3673}, \frac{805}{3673}, \frac{215}{3673}\right)$$

$$\boxed{h_4 = \frac{1}{8\sqrt{95\,498}}(1664, 373, -1486, 549, 805, 215)}$$

$$< h_5', h_i >=< \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + \lambda_3 h_3 + \lambda_4 h_4 + v_5, h_i >= \lambda_i + < v_5, h_i >= 0$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{\sqrt{23}},\ \lambda_2 = -\frac{1}{4\sqrt{506}},\ \lambda_3 = \frac{995}{4\sqrt{80\,806}},\ \lambda_4 = -\frac{373}{8\sqrt{95\,498}}$$

$$\Downarrow\Downarrow$$

$$\boxed{h_5 = \left(0, \frac{7\sqrt{\frac{15}{26}}}{8}, \frac{5\sqrt{\frac{15}{26}}}{28}, -\frac{29\sqrt{\frac{5}{78}}}{56}, \frac{239}{56\sqrt{390}}, -\frac{109}{8\sqrt{390}}\right)}$$

Абсолютно аналогично находим и последний шестой вектор:

$$\boxed{h_6 = \left(0, 0, \frac{\sqrt{15}}{7}, \frac{2\sqrt{\frac{5}{3}}}{7}, \frac{19}{7\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}\right)}$$

Задача №2

Рассмотрим линейное пространство непрерывных функций на отрезке $[0, 2\pi]$. Введем скалярное произведение следующим образом:

$$< f, g >= \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$$

Рассмотрим подпространство L, порожденное функциями $f_1(x) = \cos(6x)$, $f_2(x) = \cos(3x)$, $f_3(x) = \sin(7x)$, $f_4(x) = \sin(x)$. Доказать, что функции $f_1, \dots, f_4$ образуют ортогональный базис в подпространстве L. Построить ортонормированный базис в L вида $\lambda_1 f_1, \dots, \lambda_4 f_4$.

Решение:

Для начала отметим, что любая из данных функций, скалярно умноженная сама на себя, даст в результате не ноль:

$$\int_0^{2\pi} f(x)f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx > 0$$

так как функция $f^2(x) \geq 0$ принимает положительные значения на множестве ненулевой меры. Теперь отметим, что данная билинейная форма симметрична, поэтому для каждой пары векторов достаточно проверить, что одно скалярное произведение равно нулю.

$$\int_0^{2\pi} f_1(x)f_2(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \cos(6x)\cos(3x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big(\cos(9x) + \cos(3x)\big)\,dx = 0$$

Здесь была использована формула для подсчета произведения косинусов, а также использован следующий факт:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \int\limits_0^{2\pi} \cos(nx)\,dx = \int\limits_0^{2\pi n} \cos(t)\,dt = \sin(2\pi n) - \sin(0) = 0$$

Продолжим считать скалярные произведения:

$$\int\limits_0^{2\pi} f_{1,2}(x) f_{3,4}(x)\,dx = \int\limits_0^{2\pi} \cos(ax)\sin(bx)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \big(\sin((b+a)x) + \sin((b-a)x)\big)\,dx = 0$$

Здесь была использована формула для подсчета произведения синуса на косинус, а также использован следующий факт:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \int\limits_0^{2\pi} \sin(nx)\,dx = \frac{-1}{n}\cos(nx)\Big|_0^{2\pi} = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n} = 0$$

Осталось проверить лишь одно скалярное произведение.

$$\int\limits_0^{2\pi} f_3(x) f_4(x)\,dx = \int\limits_0^{2\pi} \sin(7x)\sin(x)\,dx = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \big(\cos(8x) - \cos(6x)\big)\,dx = 0$$

Нетрудно понять, что все четыре вектора линейно независимы. Кроме того, каждая пара ортогональна. Выходит, что набор f_1, f_2, f_3, f_4 является ортогональным базисом в пространстве L.
Длина вектора $f(x)$ в терминах данного скалярного произведения равна

$$|f(x)| = \sqrt{\int\limits_0^{2\pi} f^2(x)\,dx}$$

Подсчитаем длины всех векторов и поделим векторы на их длины, чтобы нормировать базис.

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^2(6x)\,dx = \pi, \int\limits_0^{2\pi} \cos^2(3x)\,dx = \pi, \int\limits_0^{2\pi} \sin^2(7x)\,dx = \pi, \int\limits_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx = \pi$$

Теперь можно без труда записать ортонормированный базис:

$$f_1'(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(6x),\ f_2'(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(3x),\ f_3'(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(7x),\ f_4'(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(x)$$

Задача №3

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^4$. Пусть стандартный базис ортонормирован. Рассмотрим новый базис, заданный векторами $e_1' = (-2, 2, 1, -1), e_2' = (-1, 2, 0, 2), e_3' = (0, 0, 2, 2)$, $e_4' = (0, 1, 2, -3)$.

b. *Пусть u, v – некоторые вектор-столбцы, A – произвольная матрица $m \times n$, причем $Au = v$. Доказать, что тогда $v^T = u^T A^T$.*

Решение:

Если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$ то из $Au = v$ верно, что

$$v_i = u_1 a_{i1} + \ldots + u_n a_{in}$$

Рассмотрим теперь выражение $u^T A^T = V$.

$$(u_1, \ldots, u_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (V_1, \ldots, V_m)$$

где $V_i = a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \ldots + a_{in}u_n = u_1 a_{i1} + \ldots + u_n a_{in} = v_i$, т.е. $V = v^T$, откуда $u^T A^T = v^T$.

a. *Найти $< e_i', e_j' >$ для всех пар $i, j = 1, \ldots, 4$. Записать матрицу скалярного произведения в новом базисе. Представить эту матрицу в виде $C^T EC$.*

Решение:

Координаты X некоторого вектора x в старом базисе связаны с координатами X' этого же вектора в новом базисе через матрицу перехода C следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix}$$

Поскольку стандартный базис ортонормирован, то для любых двух векторов x, y из $\mathbb{R}^4$ с векторами координат X, Y верно $< x, y >= X^T EY$. Но тогда

$$< x, y >= X^T EY = (CX')^T E(CY') = X'\big(C^T EC\big)Y'$$

Матрица $B' = C^T EC$ – это и есть матрица скалярного произведения в новом базисе.

$$B' = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 0 & 7 \\ 4 & 9 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & 8 & -2 \\ 7 & -4 & -2 & 14 \end{pmatrix}$$

Но поскольку это матрица скалярного произведения в новом базисе, то любой элемент $b'_{ij} =< e'_i, e'_j >$.

c. *Рассмотрим вектор $u = x'_1 e'_1 + \ldots + x'_4 e'_4$. Найти координаты $x_1, \ldots, x_4$ этого вектора в старом базисе. Найти такую матрицу D, что верно равенство:*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix}$$

Решение:

Так получилось, что я уже нашел эту матрицу в предыдущем пункте: $D = C$. Действительно, по ее столбцам написаны координаты новых базисных векторов относительно старого базиса. Из пункта b следует, что $X = DX' \implies X^T = X'^T D^T$. Вектор u имеет вид

$$u = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x'_1 - x'_2 \\ 2x'_1 + 2x'_2 + x'_4 \\ x'_1 + 2x'_3 + 2x'_4 \\ -x'_1 + 2x'_2 + 2x'_3 - 3x'_4 \end{pmatrix}$$

d. *Билинейная форма задана матрицей B в стандартном базисе:*

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 & -3 \\ -2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Найти ее матрицу в новом базисе. Представить найденную матрицу в виде $F^T B F$ для некоторой матрицы F.

Решение:

Аналогично пункту a:

$$< x, y >= X^T B Y = (CX')^T B (CY') = X' \big(C^T B C \big) Y'$$

Матрица $B' = C^T B C$ и есть матрица скалярного произведения в новом базисе. Выбирая $F = C$, получаем

$$B' = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 & -3 \\ -2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow\Downarrow$$

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 16 & 9 \\ 1 & 16 & 26 & -8 \\ 4 & -2 & 8 & 22 \\ -2 & -41 & -20 & 31 \end{pmatrix}$$

Задача №5

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^2$. Пусть $u = (1, 3), v = (1, 4)$. Рассмотрим такой линейный оператор f, что $f(u) = 3u$, $f(v) = 2v$.

a. *Найти его собственные векторы. Убедиться, что они находятся в первой четверти.*

Решение:

Уже из определения оператора видно, что векторы u, v являются собственными и что они лежат в первой четверти, причем их собственные значения различаются. Пусть существует еще собственный вектор $x \neq \alpha u, x \neq \alpha v$. Если вектору x соответствует собственное значение, отличное от 2 и 3, то у характеристического многочлена оператора, действующего в двухмерном пространстве, есть три различных корня, чего не может быть. Если же ему соответствует собственное значение, то, поскольку векторы с одним собственным значением образуют линейное подпространство, все векторы плоскости должны также быть собственными с одним и тем же собственным значением, что также не правда. Значит не существует собственных векторов, отличных от u, v (с точностью до умножения на скаляр).

b. *При доказательстве теоремы Фробениуса используется теорема о неподвижной точке, которая утверждает не только существование, а еще и единственность неподвижной точки (и значит соответствующего собственного вектора). Почему в данном случае утверждение о единственности собственного вектора в первой четверти не выполняется?*

Решение:

Найдем матрицу оператора f.

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = f(v-u) = f(v)-f(u) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix};\ f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f(4u-3v) = 4f(u)-3f(v) = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Тогда матрица оператора имеет вид

$$F = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}$$

Как мы помним, теорема Фробениуса применима только к операторам, матрица которых содержит лишь строго положительные элементы. Поскольку в матрице данного оператора есть отрицательные элементы, то теорема Фробениуса не применима и, следовательно, ничто не гарантирует единственность собственного вектора в первой четверти.