В рамках курса «Линейная Алгебра» студенты часто сталкиваются с решением уравнений высоких степеней. Существует множество схем решения таких уравнений, но в данном листке будет показана, на наш взгляд, самая эффективная и простая. Схема Горнера, основанная на теореме Безу, позволяет за считанные секунды решить сложное уравнение без мучительных подстановок и деления многочленов «в столбик».

Важно не забывать, что приведенный метод далеко не единственный способ поиска корней выражения. Ниже можно привести несколько других способов, которые в разных случаях бывают более или менее полезными

- Группировка (вынесение общего множителя, формулы сокращенного умножения, выделение полного квадрата).
- Метод неопределенных коэффициентов.
- Возвратные и симметрические уравнения.
- Однородные уравнения.
- Нахождение очевидного корня или деление «уголком».

В этом листке мы сконцентрируемся на соверщенствовании последнего метода. Начнем с небольшой теоритической части.

Теорема 1 (Безу)**.** *Остаток от деления многочлена $F(x)$ на линейный двучлен $(x-a)$ равен значению многочлена в точке , т. е. числу $F(a)$.*

Доказательство. Разделим многочлен $F(x)$ на $(x-a)$ с остатком. Пусть остаток равен r, тогда деление многочлен может быть представлен как $F(x) = (x-a)Q(x) + r$, где $Q(x)$ — многочлен степени ниже, чем $F(x)$. Теперь подставим $x = a$: $F(a) = (a-a)G(x) + r = r$, что и требовалось доказать. □

Следствие 2. *Для того чтобы многочлен $F(x)$ делился на двучлен $(x-a)$, необходимо и достаточно, чтобы $F(a) = 0$, т. е. чтобы a было корнем многочлена F.*

Очень часто мы оперируем с многочленами, у которых все коэффициенты целые. Тогда действует теорема 3:

Теорема 3 (б/д)**.** *Если все коэффициенты многочлена — целые числа, то каждый его рациональный корень p/q имеет числителем p делитель свободного члена a_0, а знаменателем q — делитель старшего коэффициента.*

Теперь мы можем перейти непосредственно к схеме Горнера.

Схема Горнера — это алгоритм деления многочленов, записанный для частного случая, когда частное равно двучлену $(x-a)$.

Пусть $P(x) = a_x x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ — делимое, $Q(x) = b_{n-1}b^{n-1} + b_{n-2}b^{n-2} + \cdots + b_0$ — частное (очевидно, что его степень меньше на один), r — остаток, константа. По определению деления с остатком $P(x) = Q(x)(x-a) + r$, подставляя в это выражение получим:

$$a_x x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = (b_{n-1}b^{n-1} + b_{n-2}b^{n-2} + \cdots + b_0)(x-a) + r$$

Раскрываем скобки и приравняем коэффициенты при равных степенях.

Коэффициенты при одинаковых степенях	Выражение коэффициентов b_i через коэффициенты a_i
$a_n = b_{n-1}$	$b_{n-1} = a_n$
$a_{n-1} = b_{n-2} - ab_{n-1}$	$b_{n-2} = ab_{n-1} + a_{n-1}$
$\ldots$	$\ldots$
$a_i = b_{i-1} - ab_i$	$b_{i-1} = ab_i + a_i$
$\ldots$	$\ldots$
$a_0 = r - ab_0$	$r = ab_0 + a_0$

Для удобства данную таблицу принято записывать в строчке в следующем виде:

	a_n	...	...	$\mathbf{a_k}$	...	a_0
a	$b_{n-1} = a_n$	...	$\mathbf{b_k}$	$\mathbf{b_{k-1} = ab_k + a_k}$	...	$r = ab_0 + a_0$

Если нам даны $\{a_0 \dots a_n\}$ и $\{b_0 \dots b_n\}$ — числа, то если мы предполагаем, что число a является нашим корнем, то мы записываем его слева в таблицу, затем сносим первый элемент таблицы, а для каждого элемента до конца мы умножаем предыдущий элемент строки на a и прибавляем к строке. Если в конце (в остатке на деление на a) мы получили 0, то тогда число является корнем уравнения, а получившиеся элементы строки — коэффициентами перед соответствующими x, смещенными на один влево.

Чтобы понять механизм работы этой простой схемы необходимо привести пример.

Пример 1

Допустим, на контрольной необходимо быстро решить уравнение $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$. Для этого, **Действие 1:**, записываем коэффициенты уравнения в табличку.

	1	-2	-5	6

Действие 2: находим предположительные корни. Они равны делителям свободного члена, то есть $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.
Действие 3: проверяем очевидные корни, к примеру 1. Записываем его в таблицу.
Конечно, проверить, является ли число 1 корнем уравнения, можно простой подстановкой (в данном случае $1 - 2 - 6 + 6 = 0$ — действительно корнь), но трудности начинаются когда проверяются большие корни и возводятся в высокие степени. Поэтому вернемся к алгоритму.

	1	-2	-5	6
1				

Действие 4: сносим левое значение таблицы вниз.

	1	-2	-5	6
1	1			

Действие 5: заполняем таблицу, умножая предыдущий столбец на проверяемое число и прибавляя столбец.

	1	-2	-5	6
1	1	$1 \cdot 1 - 2 = -1$		

...

	1	-2	-5	6
1	1	-1	-6	0

Что означает полученный результат? В последней строчке получился 0. Остаток от деления многочлена на $x - 1$ равен нулю, то есть 1 — это корень нашего уравния! Действительно, нетрудно проверить, что $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x^2 - x - 6)$

Теперь посмотрим на получивнюся строку. Мы можем, конечно, решить квадратное уравнение сами, но для наглядности доведем решение до конца. Строка - это новые коэффициенты перед x, поэтому мы можем опять, не выходя из таблицы решить это уравнение. Предположим, что новый корень 3. Запишем таблицу.

	1	-2	-5	6
1	1	-1	-6	0
3				

Опять сносим первый коэффициент и умножаем предыдущий столбец на 3 и прибавляем верхнее значение. **Важно не запутаться**, что теперь нас не интересует первая строка, и вычитаем мы только числа их новой строки! Для наглядности отчертим двумя прямыми.

	1	-2	-5	6
1	1	-1	-6	0
3	1	2	0	

Опять успех! В последнем столбце ноль, значит три - это корень уравнения! Последний корень равен двум, и таблица заканчивается.

	1	-2	-5	6
1	1	-1	-6	0
3	1	2	0	
2	1	0		

Мы решили уравнение $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$. Его корни $1, 2$ и 3.

Пример 2

Решим более сложное уравнение: $2x^4 + x^3 - 35x^2 - 88x - 60 = 0$. Тут нам может не повести, и какие-то корни мы не угадаем. Давайте попробуем $x = -1$

	2	1	-35	-88	-60
-1	2	-1	-34	-54	-6

Последний столбец не 0, поэтому -1 — не корень. Попробуем выбрать другой, к примеру -2.

	2	1	-35	-88	-60
~~-1~~	~~2~~	~~-1~~	~~-34~~	~~-54~~	~~-6~~
-2	2	-3	-29	-30	0

Успех, -2 — это корень. Продолжаем работать с новой таблицей. Попробуем 1.

	2	1	-35	-88	-60
~~-1~~	~~2~~	~~-1~~	~~-34~~	~~-54~~	~~-6~~
-2	2	-3	-29	-30	0
1	2	-1	-30	-60	

1 — это не корень. Попробуем корень 5.

	2	1	-35	-88	-60
~~-1~~	~~2~~	~~-1~~	~~-34~~	~~-54~~	~~-6~~
-2	2	-3	-29	-30	0
~~1~~	~~2~~	~~-1~~	~~-30~~	~~-60~~	
5	2	7	6	0	

5 — это корень. Попробуем корень -2.

	2	1	-35	-88	-60
~~-1~~	~~2~~	~~-1~~	~~-34~~	~~-54~~	~~-6~~
-2	2	-3	-29	-30	0
~~1~~	~~2~~	~~-1~~	~~-30~~	~~-60~~	
5	2	7	6	0	
-2	2	3	0		

Отлично! И последний корень, как видно, $-3/2$. Итак, мы решили уравнение $2x^4+x^3-35x^2-88x-60 = 0$ намного проще, чем если бы мы делили в столбик.

Примеры для самостоятельного решения

Примеры предлагаются решить самостоятельно при помощи схемы Горнера. Это НЕ дополнительный листочек, баллы за это не присуждаются.

Задача 1 $x^3 + 2x^2 - 40x + 64 = 0$

Задача 2 $x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 18 = 0$

Задача 3 $x^5 - 12x^4 + 56x^3 - 128x^2 + 144x - 64 = 0$
Задача 4 $x^5 + 3x^4 - 11x^3 - 51x^2 - 62x - 24 = 0$
Задача 5 $3x^3 + 10x^2 + x - 6 = 0$
Задача 6 $48x^4 - 248x^3 + 27x^2 + 63x + 10 = 0$