1 Задача о ханойской башне

1.1 Формулировка задачи

Легенда (о Ханойской башне)**.** *Легенда гласит*[1]*, что в Великом храме города Бенарас, под собором, отмечающим середину мира, находится бронзовый диск, на котором укреплены 3 алмазных стержня, высотой в один локоть и толщиной с пчелу.*

Давным-давно, в самом начале времён, монахи этого монастыря провинились перед богом Брахмой. Разгневанный, Брахма поместил на один из стержней 64 диска из чистого золота, причем так, что каждый меньший диск лежит на большем. Он сказал монахам перекладывать диски со стержня на стержень по одному, причём запретил класть больший диск на меньший.

Как только все 64 диска будут переложены со стержня, на который Брахма сложил их при создании мира, на другой стержень, башня вместе с храмом обратятся в пыль и под громовые раскаты погибнет мир.

1.2 Возможность сборки

Задача 1. *Возможно ли монахам справиться с заданием Брахмы, если монахи бессмертны?*

При решении такой задачи можно сначала попробовать решить её «вручную»: поперекладывать диски, стараясь переместить все на второй стержень. Даже если таким способом не получается решить задачу полностью , можно заметить какие-то закономерности и лучше разобраться в условии задачи.

Напоминание: на лекции спор о том, что делать дальше, возник на 9-м ходу

Другой возможный подход к решению задач — попробовать решить сначала задачу с меньшими числами. В нашей задаче полезно сначала разобраться с аналогичной задачей для «маленького» количества дисков.

Например, при решении задачи об оптимальных ставках на лошадиных бегах можно начать со случая забега с 0 скакунами и случая забега с 1 скакуном.

Задача 2. *Смогли бы жрецы справиться с заданием Брахмы, если бы дисков было 0? 1? 2? 3?*

[1] Легенда излагается в основном по http://ru.wikipedia.org/wiki/Ханойская_башня; тамже можно прочесть об истории возникновения этой головоломки. За достоверность легенды автор текста никакой ответственности не несёт.

Решим сначала эту более простую задачу. На рис. 1 приведены возможные схемы перекладываний для башен из 1, 2 и 3 дисков.

Посмотрим, как устроен процесс перекладывания для башни из трёх дисков: сначала мы перекладываем верхние два диска на третий стержень (первые три хода), затем перекладываем нижний диск на второй стержень (четвёртый ход), после чего перекладываем верхние два диска с третьего стержня на второй.

Теперь можно придумать способ перекладывания башни из четырёх дисков: объединим мысленно верхние 3 диска в один «супердиск», переложим его на третий стержень (это мы умеем делать — см. рис. 1), переложим нижний диск на второй стержень, после чего переложим «супердиск» с третьего стержня на второй.

Аналогичным образом можно переложить и башню из пяти дисков. Единственное отличие состоит в том, что в «супердиск» следует объединить верхние 4 диска.

Теперь можно записать решение задачи 1.

> *Чтобы переложить 64 диска с первого стержня на второй, можно объединить мысленно верхние* 63 *диска в один «супердиск», переложить его на третий стержень, затем переложить нижний диск на второй стержень, и наконец, переложить «супердиск» с третьего стержня на второй.*

Однако, это решение неполное: не хватает объяснения, как перекладывать «супердиск» из 63 дисков. Поэтому для полного решения нам придётся записать 64 текста, похожих на приведённый в предыдущем абзаце, делая небольшие замены в зависимости от высоты башни.

Чтобы не писать (почти) одно и то же несколько раз, можно обозначить количество дисков в башне буквой n, и записать этот текст всего один раз.

> *Чтобы переложить n дисков с первого стержня на второй, можно объединить мысленно верхние* $(n-1)$ *диск в один «супердиск», переложить его на третий стержень, затем переложить нижний диск на второй стержень, и наконец, переложить «супердиск» с третьего стержня на второй.*

Однако, при использовании такой записи надо быть осторожными: следует всегда проверять, для каких значений n она «работает». Ясно,

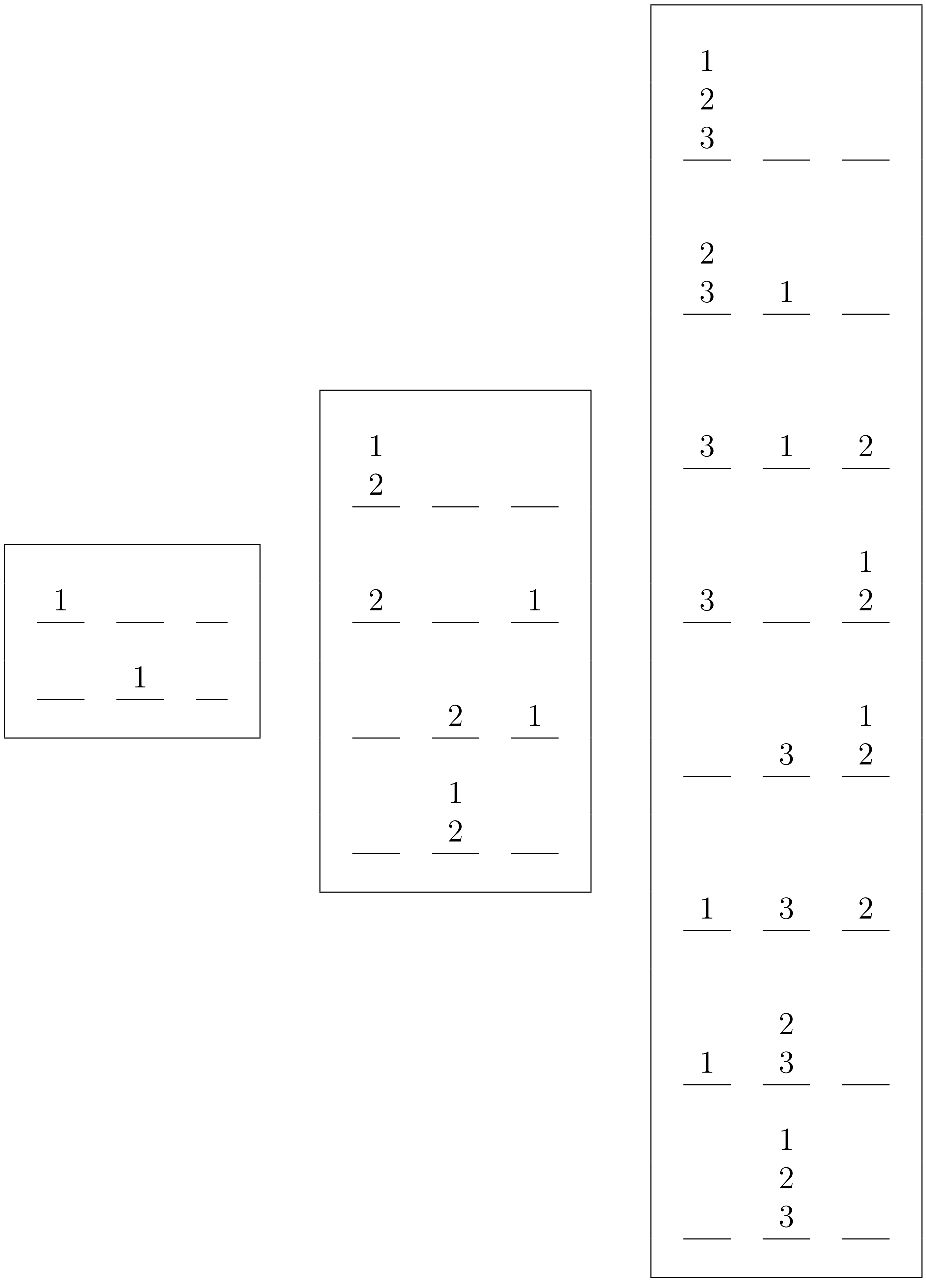

Рис. 1: Схемы перекладывания для 1, 2 и 3 дисков в задаче о Ханойской башне

что текст предыдущего абзаца не имеет смысла для отрицательных (а также для нецелых) значений n: в башне не может быть отрицательного количества дисков. Но есть ещё одно исключение: $n = 0$. Действительно, при $n = 0$ «супердиск» содержал бы $n - 1 = -1$ диск, что невозможно. Таким образом, точная формулировка алгоритма такая.

> *Чтобы переложить n дисков, $n \geq 1$, с первого стержня на второй, можно объединить мысленно верхние $(n-1)$ диск в один «супердиск», переложить его на третий стержень, затем переложить нижний диск на второй стержень, и наконец, переложить «супердиск» с третьего стержня на второй.*
>
> *Чтобы переложить 0 дисков, не надо делать ничего.*

Приведённый алгоритм перекладывания обладает одной важной особенностью: на одном из шагов требуется исполнить весь алгоритм, но для другого n. Алгоритмы такого вида называются *рекурсивными*. Неудобство этого алгоритма состоит в том, что он не даёт быстрого ответа на вопрос «Какой же ход делать первым?»: для ответа на этот вопрос приходится мысленно «развернуть» n уровней вложенности.

1.3 Количество ходов

После вопроса теоретической разрешимости за бесконечное время бывает полезно выяснить, возможно ли решить задачу за небольшое время.

Большинство современных алгоритмов шифрования стремятся именно к тому, чтобы код было невозможно «сломать» за небольшое время: месяц, год, два года, десять лет в зависимости от важности информации.

Задача 3. *За какое наименьшее количество ходов можно собрать Ханойскую башню?*

На лекции мы решим только более простую задачу

Задача 4. *Сколько ходов потребуется на перекладывание Ханойской башни, если действовать по алгоритму из предыдущего пункта?*

Эти две задачи существенно отличаются. Представьте, что вас спросили, как быстрее всего дойти от здания Вышки на Малом Гнездниковском до м. Тверская, а вы ответили: «Я обычно хожу через ст. м. Смоленская, получается около часа».

Для решения задачи такого вида полезно сначала угадать ответ, а потом его доказать. Чтобы угадать ответ, удобно сначала составить таблицу, в которой один столбец — количество дисков, а другой — количество ходов.

Количество дисков	Количество ходов
0	0
1	1
2	3
3	7

Как вычислять количество ходов для большего количества дисков? Посмотрим на наш алгоритм: для перекладывания башни из n дисков надо дважды переложить башню из $n-1$ диска и сделать ещё один ход. Если обозначить количество ходов, необходимых для перекладывания башни из n дисков по нашему алгоритму, через T_n, то наблюдение из предыдущего предложения можно записать формулой:

$$T_n = 2T_{n-1} + 1,\ n \geq 1.$$

Теперь можно продолжить нашу таблицу дальше.

Количество дисков	Количество ходов
0	0=0
1	1=0+1+0
2	3=1+1+1
3	7=3+1+3
4	15=7+1+7
5	31=15+1+15
6	63=31+1+31

Глядя на эту таблицу, можно догадаться до ответа: $T_n = 2^n - 1$. Поскольку эта формула для T_n «сходится» со всеми имеющимися у нас данными, можно попытаться её доказать. Во-первых, мы знаем, что $T_1 = 1 = 2^1 - 1$. Во-вторых, если $T_{n-1} = 2^{n-1} - 1$, то $T_n = 2T_{n-1} + 1 = 2(2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1$. Осталось применить принцип математической индукции. Более подробный текст о том, как это делать, появится на сайте около обеда.