Факультет прикладной политологии, 2011-12 уч. год.
Дополнительные главы алгебры и анализа
Пределы (22 февраля 2012)
И. А. Хованская, И. В. Щуров, Ю. Г. Кудряшов, П. Ф. Соломатин, К. И. Сонин (РЭШ)

1. Зачем нужны пределы

На прошлых лекциях мы обсуждали, что производная — это «мгновенная скорость» изменения значения функции, то есть средняя скорость (пройденное расстояние, деленное на время), вычисленная за «очень маленький» промежуток времени. Какой именно промежуток считается «маленьким»? На этот вопрос невозможно ответить однозначно — в разных случаях «очень маленьким промежутком» может быть и месяц (например, если мы обсуждаем цену на какой-то товар), и минута (если мы говорим о температуре за окном), и секунда (если мы говорим о движении автомобиля). Однако, мы точно знаем одно — чем он *меньше*, тем *точнее* мы получаем значение мгновенной скорости.

Напомним, как производная определяется на языке формул. Пусть $F(x)$ — наша функция, и нас интересует мгновенная скорость (то есть производная) в момент времени x_0. Чтобы её найти, нужно взять какой-то маленький интервал времени h и вычислить «среднюю скорость» за время h. «Пройденное расстояние» за время h от момента x_0 равняется $F(x_0+h)-F(x_0)$, а скорость, таким образом, равна

$$L(h)=\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}.$$

Если зафиксировать число x_0, выражение, написанное справа — это некоторая функция, зависящая от h. Нас интересует значение $L(h)$ когда h очень близко к нулю. Вычислить значение $L(0)$ невозможно, поскольку в этом случае в знаменателе дроби стоит 0. Однако, чем ближе h к нулю, тем точнее значение $L(h)$ соответствует тому, что мы бы хотели называть «мгновенной скоростью».

Оказывается, можно рассматривать аналогичную задачу в общем виде, когда вместо $L(h)$ используется произвольная функция. Если нас интересует, к чему приближается значение функции, когда её аргумент приближается к какой-то фиксированной точке, говорят, что мы рассматриваем *предел функции* в этой точке. Используя понятие предела, определение производной можно записать в виде

$$F'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}.$$

Или, обозначая конец того интервала времени, который мы рассматриваем, через x (то есть полагая $x=x_0+h$):

$$F'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}.$$

2. Угадывание пределов: примеры

Рассмотрим несколько примеров. Допустим, нас интересует, к чему приближается значение функции $f(x)=x^2+1$ когда x приближается к нулю. Чтобы ответить на этот вопрос, возьмем несколько значений x, так, чтобы они были всё ближе и ближе к нулю, и вычислим

x	$f(x)$
1	2
0,5	1,25
0,1	1,01
0,01	1,0001

Таблица 1: Значение $f(x) = x^2 + 1$ вблизи 0, когда x приближается к нулю справа

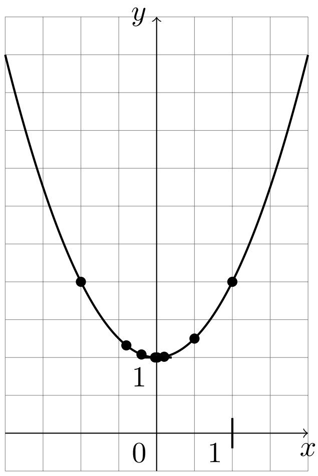
x	$f(x)$
-1	2
-0.4	1,16
$-0,2$	1,04
$-0,02$	1,0004

Таблица 2: Значение $f(x) = x^2 + 1$ вблизи 0, когда x приближается к нулю слева

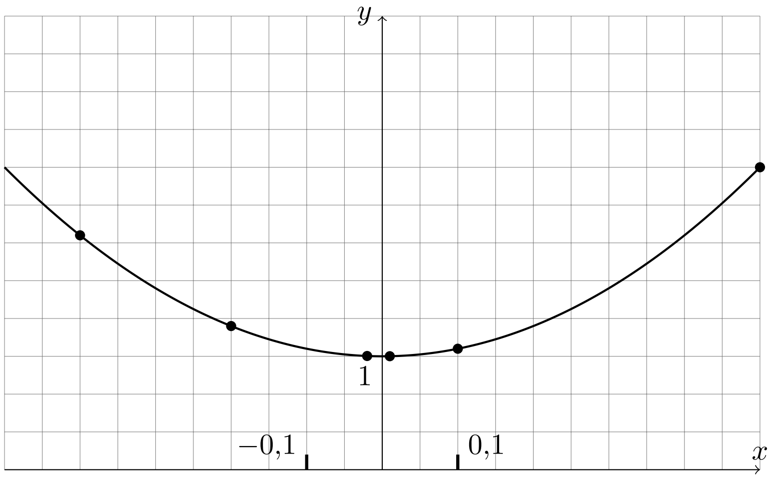
значение $f(x)$ в этих точках. Запишем результат в виде таблички. Глядя на таблицу 1 кажется достаточно логичным предположить, что предел равен 1 — по мере того, как x становится близким к 0, числа во втором столбце (значение $f(x)$) становятся всё ближе и ближе к 1. Однако, мы брали только значения x, больше 0. Может быть, при $x < 0$ ответ был бы другим? Дополним таблицу, взяв какие-то отрицательные значения x, приближающиеся к нулю слева (см. табл. 2). Похоже, что и в этом случае предел равен 1. Это правда так:

$$\lim_{x\to 0}(x^2 + 1) = 1.$$

В данном случае нетрудно посчитать значение функции в точке 0: $f(0) = 0^2 + 1 = 1$. Оно совпадает с пределом, и это кажется совершенно естественным — особенно если посмотреть на график, см. рис. 1. Точки, соответствующие вычисленным нам значениям функции, приближаются к точке $(0, 1)$, соответствующей значению функции при $x = 0$, по мере того, как значения x приближаются к 0.



(a)



(b)

Рис. 1: График функции $y = x^2 + 1$ и отмеченные точки

Зачем тогда потребовалось вводить понятие предела, если предел просто равен значению функции в точке? Дело в том, что это не всегда правда. Для большинства «хороших» функций (записываемых формулой) в большинстве случаев это верно — по крайней мере, если x стремится к точке, в которой функция определена. Но бывают функции, не определенные в какой-то (наиболее нам интересной) точке (как это было в случае с производной), а бывают совсем «плохие» функции, значение которых в какой-то точке не совпадает с пределом в этой же точке. Вопрос о том, когда значение функции равно пределу (это свойство называется «непрерывностью») мы еще обсудим более подробно, а сейчас разберем еще один пример.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Она не определена при $x = 1$ (знаменатель обращается в ноль). Чему равен её предел в этой точке? Поступим так же, как в предыдущем примере: возьмем несколько значений x, приближающихся к 1, и посмотрим, чему равно в этих точках значение функции (см. табл. 3). Кажется вполне реалистичным предположение, что $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ — и мы снова угадали! По правде говоря, здесь есть небольшое жульничество: дробь, которой задается наша функция, легко сокращается — достаточно разложить числитель на множители, воспользовавшись правилом разности квадратов:

x	$f(x)$
2	3
1,5	2,5
1,1	2,1
1,01	2,01

x	$f(x)$
0	1
0,5	1,5
0,9	1,9
0,99	1,99

Таблица 3: Значения функции $y = f(x)$ вблизи $x = 1$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = x + 1.$$

Это равенство выполняется для всех x, кроме $x = 1$. Таким образом, функция $f(x)$ совпадает с функцией $x + 1$ во всех точках, кроме $x = 1$ (где $f(x)$ не определена). Поэтому, конечно, нет ничего удивительного в том, что предел этой функции в точке $x = 1$ равен $1 + 1 = 2$.

Чуть позже мы столкнёмся с более нетривиальными случаями вычисления пределов.

3. Попытка определить предел

Строгое математическое определение понятия предела довольно громоздко и трудно для восприятия. Как представляется, великие Ньютон и Лейбниц были с ним незнакомы, но математический анализ освоили довольно неплохо.[1] Мы тоже попробуем обойтись без строгого определения. Для начала, немного терминологии: слова «функция $f(x)$ стремится к b при x стремящемся к a» (в обозначениях: $f(x) \to b$ при $x \to a$) полностью тождественны словам «предел функции $f(x)$ при x стремящемся к a равен b» и обозначению $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

Определение 1. Говорят, что функция $f(x)$ стремится к точке b при x стремящемся к a, если значение функции $f(x)$ неограниченно приближается к b когда x неограниченно приближается к a (но при этом $x \neq a$).

[1] Вообще-то, они его создали

Это определение достаточно наглядно, и в целом согласуется с описанием выше, хотя и не очень понятно, что значит «неограниченно приближается». Попробуем сформулировать более точное определение.

Определение 2. Говорят, что функция $f(x)$ стремится к точке b при x стремящемся к a, если мы можем сделать значение $f(x)$ сколь угодно близким к b, выбирая x достаточно близко к a, но при этом $x \neq a$.

Это определение имеет один изъян, мы его обсудим чуть позже, а для начала попробуем применить его к первому примеру выше — нахождению предела $\lim_{x\to 0}(x^2+1)$. Мы уже знаем, что этот предел равен 1 — давайте попробуем это доказать, опираясь на определение 2.

Предположим, что $f(x)$ — это значение какого-то параметра, который мы хотим контролировать. Например, x — это угол, под которым бросается снаряд, а $f(x)$ — это координата места, в которое он попадает. (Игравшие в Angry Birds понимают, о чём идёт речь; впрочем, строго говоря, координата точки попадания описывается другой формулой.) Мы можем выбирать x вблизи 0 и нам нужно сделать $f(x)$ очень близким к 1 (значение предела). Конечно, проще всего было бы положить $x = 0$, но именно это нам запрещено правилами игры. Насколько точно надо попасть? А насколько угодно — этого мы заранее не знаем. Допустим, в начале игры нам говорят, что нужно попасть в точку 1, отклонившись не более чем на 0,0001. То есть требуется, чтобы $f(x)$ отличалось от 1 не более, чем на 0,0001. Сможем ли мы это сделать? Конечно, сможем, достаточно взять x таким, чтобы расстояние от x до 0 не превосходило 0,01. Тогда x^2 не будет превосходить 0,0001, и мы выиграли.

А если бы от нас потребовали попасть с точностью $10^{-6} = 0{,}000001$? Мы бы снова могли выиграть, взяв x не превосходящим $10^{-3} = 0{,}001$.

Всегда ли мы сможем выиграть? Нетрудно видеть, что да. Какую бы точность попадания нам не задали (обозначим её буквой ε), сколь бы малой она ни была, мы можем выбрать «точность прицеливания», равную $\sqrt{\varepsilon}$, и получить попадание с заданной точностью, если только x не превосходит $\sqrt{\varepsilon}$. Это и означает, что функция $f(x)$ имеет предел 1 при $x \to 0$.

4. Когда предела не существует

Пределы бывают коварными. Давайте рассмотрим такую функцию:

$$f(x) = \sin\frac{\pi}{x}.$$

Попробуем вычислить $\lim_{x\to 0} f(x)$. Как и раньше, возьмем несколько значений x, приближающихся к нулю. Пусть $x = 1$. Тогда $f(1) = \sin\frac{\pi}{1} = \sin\pi = 0$. Пусть $x = 1/2$. Тогда $f(x) = \sin\frac{\pi}{1/2} = \sin 2\pi = 0$. Пойдем дальше, возьмем $x = 1/3$, $x = 0{,}1$, $x = 0{,}001$. Во всех случаях $f(x)$ оказывается равным нулю (проверьте это!). Для уверенности, рассмотрим несколько отрицательных значений x — допустим, $-0{,}1$, $-0{,}01$ и $-0{,}001$. Нетрудно видеть, что и в этих точках $f(x)$ принимает нулевое значение. Более того: понятно, что для любого $x = 1/n$ для сколь угодно большого натурального n значение $f(x)$ будет равно $\sin\frac{\pi}{1/n} = \sin n\pi = 0$. Если n очень велико, то выбранный таким образом x очень маленький.

Вроде бы, всё указывает на то, что предел $\sin\frac{\pi}{x}$ при $x \to 0$ равен нулю. Так ли это?

Давайте возьмем $x = 1/2{,}5$. Тогда $f(x) = \sin\frac{\pi}{1/2{,}5} = \sin 2,5\pi = \sin(2\pi + \pi/2) = 1$. Аналогичный ответ будет, если $x = 1/4{,}5$ и если $x = 1/6{,}5$ и вообще при любом $x = 1/(2n+$

1/2). Тогда $f(x) = \sin \frac{\pi}{1/(2n+1/2)} = \sin(2n+1/2)\pi = 1$. Мы снова выбрали последовательность значений x, приближающихся к нулю, но при этом $f(x)$ в соответствующих точках равна 1. Таким образом, точка 1 может претендовать на звание предела $f(x)$ при $x \to 0$, в той же мере, что и 0.

Упражнение. Докажите, что любая точка из отрезка $[-1, 1]$ тоже может «претендовать на звание предела» этой функции в том же смысле, что выше.

Здесь проявляется изъян определения 2: если думать о том, в какую точку мы можем «попасть», выбирая x близко к нулю, то понятно, что мы одинаково легко можем попасть и в 0, и в 1, и во множество других точек. Нам бы хотелось, чтобы предел, если он существует, определялся однозначно, поэтому мы скажем, что в данном примере предела нет — он *не существует*. Это оправданно и с точки зрения определения 1. Построим график функции $f(x)$. Он будет выглядеть примерно так:

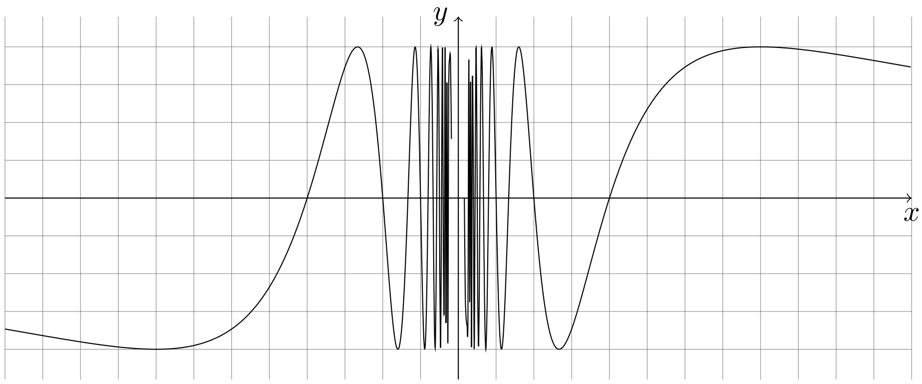


Рис. 2: График функции $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$

Когда x приближается к 0, значение функции $f(x)$ всё быстрее колеблется между -1 и 1, а не приближается к 0 (или любому другому числу). Это даёт нам дополнительный аргумент, чтобы считать, что предел $f(x)$ при $x \to 0$ не существует.

5. Бесконечные пределы

Рассмотрим функцию $f(x) = 1/(x-1)$. Чему равен её предел при $x \to 1$? Как и раньше, построим табличку: Из таблицы 4 видно, что значения функции $f(x)$ не приближаются ни

x	$f(x)$
2	1
1,5	2
1,1	10
1,01	100
1,001	1000

x	$f(x)$
0	-1
0,5	-2
0,9	-10
0,99	-100
0,999	-1000

Таблица 4: Значения функции $f(x) = 1/(x-1)$ вблизи $x = 1$

к какому числу когда x стремится к 1. Таким образом, предела не существует. Однако, про данную функцию можно сказать больше: нетрудно видеть, что чем ближе x к 1, тем больше (по модулю) значение функции $f(x)$. Если не фиксировать, с какой стороны x приближается к 1, мы можем сказать только то, что $|f(x)|$ может стать сколь угодно большим. В этом случае говорят, что *предел равен бесконечности.* Это не означает, что у функции существует предел в «обычном» смысле — скорее это способ сказать, что предела не существует, потому, что функция неограниченно увеличивается. Пишут

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \infty.$$

Если мы будем выбирать значения x только правее числа 1 (то есть $x > 1$), то есть рассмотрим предел при $x \to 1+$ (читается «стремится к 1 справа), окажется, что не только модуль $|f(x)|$ неограниченно увеличивается, но и просто значение функции $f(x)$ неограниченно увеличивается. Про такой предел говорят, то он равен $+\infty$. Записывается это так:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty.$$

Аналогично нетрудно видеть, что если x стремится к 1 слева (то есть $x < 1$), то значение функции $f(x)$ неограниченно уменьшается (становится очень большим по модулю, но при этом отрицательным). В таком случае говорят, что предел равен $-\infty$, и пишут:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty.$$

Если предел равен $+\infty$ или $-\infty$, то он в то же время равен и «просто» ∞. График нашей функции имеет вид стандартной гиперболы, сдвинутой на 1 позицию вправо, и на нём хорошо видно, как $f(x)$ уходит на бесконечность (плюс или минус) в зависимости от того, с какой стороны к 1 подходит x.

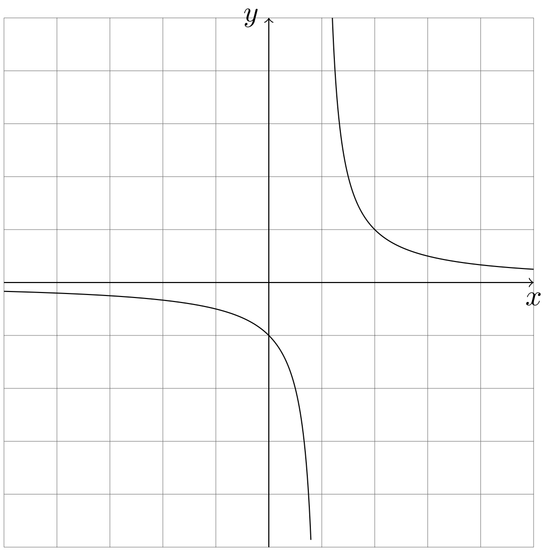


Рис. 3: График функции $f(x) = 1/(x-1)$