Отделение лингвистики филологического факультета, 2011-12 уч. год.
Дискретная математика
Комбинаторика-2. Бином Ньютона (4 октября 2011)
Ю. Г. Кудряшов, И. В. Щуров, И. А. Хованская

1. Число сочетаний и бином Ньютона

1.1. Число сочетаний

Задача 1. В зоопарке n слонов. Сколькими способами можно выбрать из них k слонов для циркового представления?

Сначала посчитаем, сколькими способами можно составить *упорядоченный список* из k слонов. На первое место в списке претендует n слонов, на второе — $n-1$ слон (так как один слон уже попал в список), на третье — $n-2$ слона, …, на k-е место — $(n-k+1)$ слона. Следовательно, общее количество списков равно $n(n-1)\dots(n-k+1)$.

Теперь разложим все возможные списки по стопкам так, чтобы в одной стопке оказались списки, в которых написаны одни и те же слоны, но в разном порядке. Посчитаем, сколько списков оказалось в одной стопке. Списки из одной стопки отличаются только порядком слонов, значит, их $k\cdot(k-1)\cdot\dots\cdot 1 = k!$ штук.

Наконец, количество способов выбрать k слонов из n равно количеству стопок:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1}$$

1.2. Симметрия

Из формулы (1) немедленно следует, что $C_n^k = C_n^{n-k}$. Действительно,

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k.$$

Это равенство можно доказать и без формулы: выбрать k слонов для цирка — это всё равно, что выбрать $n-k$ слонов, которые останутся в зоопарке.

1.3. Число путей

Задача 2. План города Нью-Васюки представляет собой прямоугольник $n\times m$. Сколько существует способов добраться из левого нижнего угла в правый верхний, двигаясь все время вверх или вправо?

Для каждого такого маршрута можно выписать «путевой лист» — последовательность стрелок $\rightarrow$ и $\uparrow$. Поскольку мы должны сместиться на n клеток вверх и на m клеток вправо, каждый такой «путевой лист» должен состоять из n стрелок $\uparrow$ и m стрелок $\rightarrow$. Поэтому количество «путевых листов» равно количеству способов выбрать, на какие n позиций из $m+n$ поставить стрелку вверх. Значит, количество маршрутов равно C^n_{m+n}.

На прошлом семинаре мы разбирали ещё один способ подсчёта того же самого количества путей. Пусть на некотором перекрёстке находится телеграф, на ближайшем снизу перекрёстке — банк, а на ближайшем слева — библиотека. Тогда все пути к телеграфу делятся на два вида: те, которые проходят через банк и те, которые проходят через библиотеку. Следовательно, *количество путей, ведущих к перекрёстку* (x, y) *(к телеграфу), равно сумме количества путей, ведущих к перекрёстку* $(x, y-1)$ *(к банку) и количества путей, ведущих к перекрёстку* $(x-1, y)$ *(к библиотеке)*. Это правило позволяет для каждого перекрёстка вычислить, сколько путей к нему ведёт. Для этого надо заполнять карту города искомыми количествами путей: сначала заполнить нижний ряд, потом — второй снизу, и т.д. В результате получается такая таблица:

1	6	21	56	126	252	462	792
1	5	15	35	70	126	210	330
1	4	10	20	35	56	84	120
1	3	6	10	15	21	28	36
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1

Рис. 1: Число способов дойти из левого нижнего угла

Поскольку количество способов дойти до перекрёстка (x, y) равно C^y_{x+y}, эта таблица совпадает с таблицей на рис. 2:

Правило заполнения таблицы можно переписать в терминах чисел C^n_{n+m}:

$$C^n_{n+m} = C^{n-1}_{n+m-1} + C^n_{n+m-1}. \tag{2}$$

$$\begin{tikzcd}
C_5^5 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_6^5 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_7^5 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_8^5 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_9^5 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_{10}^5 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_{11}^5 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_{12}^5 \arrow[d, dash] \\
C_4^4 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_5^4 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_6^4 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_7^4 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_8^4 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_9^4 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_{10}^4 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_{11}^4 \arrow[d, dash] \\
C_3^3 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_4^3 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_5^3 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_6^3 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_7^3 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_8^3 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_9^3 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_{10}^3 \arrow[d, dash] \\
C_2^2 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_3^2 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_4^2 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_5^2 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_6^2 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_7^2 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_8^2 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_9^2 \arrow[d, dash] \\
C_1^1 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_2^1 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_3^1 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_4^1 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_5^1 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_6^1 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_7^1 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_8^1 \arrow[d, dash] \\
C_0^0 \arrow[r, dash] & C_1^0 \arrow[r, dash] & C_2^0 \arrow[r, dash] & C_3^0 \arrow[r, dash] & C_4^0 \arrow[r, dash] & C_5^0 \arrow[r, dash] & C_6^0 \arrow[r, dash] & C_7^0
\end{tikzcd}$$

Рис. 2: Число способов дойти из левого нижнего угла

1.4. Треугольник Паскаля

Развернём полученную таблицу на 135° по часовой стрелке. То, что мы получим, называется *треугольником Паскаля*.

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1
\end{array}$$

Эта таблица совпадает с таблицей, полученной поворотом на 135° из таблицы 2:

$$\begin{array}{c}
C_0^0 \\
C_1^0 \quad C_1^1 \\
C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2 \\
C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3 \\
C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4 \\
C_5^0 \quad C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4 \quad C_5^5 \\
C_6^0 \quad C_6^1 \quad C_6^2 \quad C_6^3 \quad C_6^4 \quad C_6^5 \quad 1 \\
C_7^0 \quad C_7^1 \quad C_7^2 \quad C_7^3 \quad C_7^4 \quad C_7^5 \quad C_7^6 \quad C_7^7 \\
C_8^0 \quad C_8^1 \quad C_8^2 \quad C_8^3 \quad C_8^4 \quad C_8^5 \quad C_8^6 \quad C_8^7 \quad C_8^8
\end{array}$$

Например, $C_8^2 = 28$. В общем случае число C_n^k стоит в треугольнике Паскаля в n-й строке на k-м месте. При этом *нумерация строк и чисел в строках начинается с нуля.*

Правило заполнения треугольника Паскаля выглядит так: *каждое число в таблице равно сумме чисел, стоящих в предыдущей строке чуть левее и чуть правее.* Это правило получается из правила «телеграфа, банка и библиотеки» после поворота на 135°. В терминах чисел C_n^k его можно записать таким образом:

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k. \tag{3}$$

На самом деле, если поменять обозначения в формуле (2) (а именно, $n := n+m, k := n$), она превратится в формулу (3).

Итак, теперь у нас есть два способа вычисления чисел C_n^k: по формуле (1) и при помощи треугольника Паскаля. Вычислим число C_8^5 обоими способами.

Пример 1 (Вычисление C_8^5 по формуле)**.** Подставим $n = 8$, $k = 5$ в формулу (1):

$$C_8^5 = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Сократим дробь на $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$:

$$C_8^5 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 7 \cdot 8 = 56.$$

Пример 2 (Вычисление C_8^5 при помощи треугольника Паскаля)**.** Треугольник Паскаля до восьмой строки выписан выше (напомним, что самая верхняя строка — нулевая). Восьмая строка имеет вид:

$$1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1$$

Числа в строках нумеруются слева направо, начиная с нуля. Поэтому нулевым числом в этой строке будет единица, первым — восьмёрка, ..., пятое число — 56. Значит, $C_8^5 = 56$.

Замечание 1. *Для небольших чисел n и k число C_n^k быстрее вычислять по формуле* (1)*, а для больших (скажем, для $n = 1000$, $k = 500$) — при помощи треугольника Паскаля. Это связано с тем, что деление и умножение — более трудоёмкие операции, чем сложение.*

1.5. Бином Ньютона

Раскроем скобки в выражениях $(x+y)^1$, $(x+y)^2$, $(x+y)^3$ и $(x+y)^4$:

$$(x+y)^1 = x + y$$
$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x+y)^3 = (x^2 + 2xy + y^2)(x+y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x+y)^4 = (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)(x+y) = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

Выпишем результаты вычислений немного другим способом:

$$\begin{array}{lcccccccccc}
(x+y)^1 & = & & & & x & + & y & & & \\
(x+y)^2 & = & & & x^2 & + & 2xy & + & y^2 & & \\
(x+y)^3 & = & & x^3 & + & 3x^2y & + & 3xy^2 & + & y^3 & \\
(x+y)^4 & = & x^4 & + & 4x^3y & + & 6x^2y^2 & + & 4xy^3 & + & y^4
\end{array}$$

Коэффициенты в правых частях равенств образуют первые строки треугольника Паскаля! Поэтому можно предположить, что коэффициенты многочлена $(x+y)^n$ образуют n-ю строку треугольника Паскаля, то есть

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1}y + C_n^2 x^{n-2}y^2 + \dots + C_n^{n-1}x^1y^{n-1} + C_n^n y^n. \qquad (4)$$

Эта формула называется *биномом Ньютона.* Приведём два доказательства этой формулы.

Доказательство по индукции. Докажем равенство (4) индукцией по n. Для $n=1$ равенство очевидно: $(x+y)^1 = x+y = C_1^0x + C_1^1y$.

Докажем шаг индукции. Пусть для некоторого значения n формула (4) верна. Докажем её для $n+1$. В силу свойств степеней, $(x+y)^{n+1} = (x+y)^n(x+y)$. Теперь подставим вместо первой скобки правую часть равенства (4), раскроем скобки и перегруппируем слагаемые:

$$\begin{aligned}
&(x+y)^{n+1} = \\
&= (C_n^0x^n + C_n^1x^{n-1}y + \dots + C_n^{n-1}x^1y^{n-1} + C_n^ny^n)(x+y) = \\
&= C_n^0x^n(x+y) + C_n^1x^{n-1}y(x+y) + \dots + C_n^{n-1}x^1y^{n-1}(x+y) + C_n^ny^n(x+y) = \\
&= C_n^0x^{n+1}+C_n^0x^ny+C_n^1x^ny+C_n^1x^{n-1}y^2+\dots+C_n^{n-1}x^2y^{n-1}+C_n^{n-1}x^1y^n+C_n^nxy^n+C_n^ny^{n+1} = \\
&= C_n^0x^{n+1}+(C_n^0+C_n^1)x^ny+(C_n^1+C_n^2)x^{n-1}y^2+\dots+(C_n^{n-2}+C_n^{n-1})x^2y^{n-1}+(C_n^{n-1}+C_n^n)xy^n+C_n^ny^{n+1} = \\
&= C_{n+1}^0x^{n+1} + C_{n+1}^1x^ny + C_{n+1}^2x^{n-1}y^2 + \dots + C_{n+1}^{n-1}x^2y^{n-1} + C_{n+1}^nxy^n + C_{n+1}^{n+1}y^{n+1}.
\end{aligned}$$

В последнем переходе мы воспользовались правилом построения треугольника Паскаля, см. (3). База и шаг индукции доказаны. Значит, формула (4) верна для всех натуральных n. $\square$

Другое доказательство бинома Ньютона. Давайте раскроем все скобки сразу, но не будем приводить подобные и переставлять сомножители в произведениях. Например,

$$(x+y)(x+y) = xx + xy + yx + yy,$$
$$(x+y)(x+y)(x+y) = xxx + xxy + xyx + xyy + yxx + yxy + yyx + yyy.$$

Получится сумма, слагаемые которой — всевозможные произведения нескольких переменных x и нескольких переменных y. Такое произведение равно $x^{n-k}y^k$, если среди сомножителей $n-k$ раз встречается x и k раз встречается y. Поэтому количество слагаемых, равных $x^{n-k}y^k$, будет совпадать с количеством способов выбрать, на которых k позициях стоит переменная y. Это количество равно C_n^k. Следовательно, после приведения подобных слагаемых коэффициент при $x^{n-k}y^k$ будет равен C_n^k. Мы доказали формулу (4). $\square$