Отделение лингвистики филологического факультета, 2011-12 уч. год.
Дискретная математика
Зачёт 1а (24 октября 2011)

Ю. Г. Кудряшов, И. В. Щуров, И. А. Хованская

Базовая часть

Если решено менее 5 задач из этой части, работа оценивается «неудовлетворительно».

Задача 1. У Васи есть 14 чашек (все чашки разные) и 10 ложек (все ложки тоже разные). На завтрак Вася пьёт чай из какой-то чашки, размешивая сахар какой-то ложкой. Сколькими способами Вася может выбрать себе чашку и ложку для утреннего чая?

Решение. Для каждого из 14 способов выбора чашки существует ровно 10 способов выбрать ложку. Поэтому общее количество способов выбрать чашку и ложку равно $14 \cdot 10 = 140$.

Задача 2. У Васи дома собрались гости: 8 девушек и 4 юноши (включая Васю). Они хотели выпить чаю, а все чашки оказались грязными. Сколькими способами можно выбрать одного человека, который вымоет всю посуду?

Решение. Всего в доме $8 + 4 = 12$ человек, поэтому есть 12 вариантов выбора.

Задача 3. Сколькими способами можно выбрать, какие чашки мыть, если не мыть «лишних» чашек?

Решение. Требуется выбрать 12 чашек из 14. Это можно сделать $C_{14}^{12} = \frac{14 \cdot 13}{2} = 91$ способом.

Задача 4. Вася решил не лениться и сам помыл все грязные чашки, какие нашёл дома. Сколько есть способов раздать всем присутствующим по чашке?

Решение. Выстроим всех присутствующих в очередь за чашками. Тогда первому можно выдать одну из 14 чашек, второму — одну из 13, …, 12-му — одну из трёх. Значит, общее количество способов равно $14 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 3$.

Задача 5. У Васи нашлось 5 видов чая, 3 вида хлеба и 7 видов джема. Сколькими способами Маша может выбрать себе, который чай пить и который хлеб с которым джемом есть?

Решение. Количество способов выбрать себе бутерброд равно $3 \cdot 7 = 21$, а общее количество способов выбрать себе чай, хлеб и джем равно $5 \cdot 3 \cdot 7 = 105$.

Задача 6. После бутербродов с джемом Вася достал пирожные. Оказалось, что пирожных столько же, сколько людей, и все пирожные разные. Сколькими способами можно раздать пирожные собравшимся людям? Требуется, чтобы каждому досталось ровно одно пирожное.

Решение. Первый человек может взять одно из 12 пирожных, второй — одно из 11 и т. д. Итого $12!$ способов.

Дополнительная часть

Задача 7. При распределении пирожных выяснилось, что двое из присутствующих не едят ни эклеров, ни пирожных «Наполеон». Сколькими способами можно раздать пирожные, чтобы учесть вкусы этих двоих? Среди Васиных пирожных один «Наполеон» и один эклер.

Решение. Начнём раздавать пирожные с тех двоих, которые не едят ни эклеров, ни пирожных «Наполеон». Тогда первому можно выдать одно из $12-2=10$ пирожных (кроме эклера и «Наполеона»), второму — одно из $10-1=9$ пирожных (кроме эклера, «Наполеона» и того, что взял первый), третьему — одно из $12-2=10$, четвёртому — одно из 9 и т. д.

Ответ: $10 \cdot 9 \cdot 10!$.

Задача 8. О последовательности x_n известно, что $x_1 = 16$, $x_{n+1} = 4x_n - 24$. Докажите, что $x_n = 2 \cdot 4^n + 8$.

Решение. Докажем по индукции утверждение A_n: $x_n = 2 \cdot 4^n + 8$.

База индукции, $n = 1$. Утверждение имеет вид $x_1 = 2 \cdot 4^1 + 8$. Но мы знаем, что $x_1 = 16$. Осталось проверить, что $2 \cdot 4^1 + 8 = 2 \cdot 4 + 8 = 8 + 8 = 16$.

Шаг индукции. Пусть утверждение A_k верно, то есть $x_k = 2 \cdot 4^k + 8$. Докажем, что утверждение верно и для $n = k+1$, то есть $x_{k+1} = 2 \cdot 4^{k+1} + 8$. Мы знаем, что $x_k = 2 \cdot 4^k + 8$ и $x_{k+1} = 4x_k - 24$. Подставим первое из этих равенств во второе:

$$x_{k+1} = 4(2 \cdot 4^k + 8) - 24 = 2 \cdot 4 \cdot 4^k + 4 \cdot 8 - 24 = 2 \cdot 4^{k+1} + 8.$$

Итак, мы доказали требуемое равенство для $n = k+1$. Таким образом, шаг индукции доказан. Следовательно, все утверждения A_n верны.

Задача 9. В алфавите племени Улюлю 14 гласных и 7 согласных. Слово длины 4 называется *непроизносимым*, если в нём или все буквы гласные, или все буквы согласные. Сколько в языке племени Улюлю непроизносимых слов (буквы в слове могут повторяться)?

Решение. Слов длины 4, в которых все буквы гласные, ровно 14^4, а в которых все буквы согласные — 7^4. Следовательно, всего непроизносимых слов $7^4 + 14^4$.

Задача 10. Сколько существует слов длины 6 из букв английского алфавита, в которых нигде не встречается двух одинаковых букв подряд?

Решение. На первое место можно поставить любую из 26 букв, а на каждое следующее — любую кроме той, что стоит на предыдущем месте, то есть одну из 25 букв. Поэтому общее количество способов равно $26 \cdot 25^5$.

Задача 11. Сколькими способами можно переставить буквы в слове VHZNWYX, чтобы буква Z шла раньше буквы N, но не стояла на первом месте?

Решение. Заметим, что слов, в которых буква Z идёт раньше буквы N столько же, сколько слов, в которых буква N идёт раньше буквы Z. Поэтому слов, в которых буква Z идёт раньше буквы N, ровно $7!/2$. Осталось вычесть из этого количество слов, в которых буква Z стоит на первом месте. Таких слов $6!$.

Ответ: $7!/2 - 6!$.

Задача 12. Коле надо сделать сегодня вечером 8 из имеющихся 12 домашних заданий. Коля хочет выбрать, в каком порядке и над какими заданиями работать. Сколькими способами он может это сделать, если по двум заданиям сегодня вечером крайний срок, и их сделать обязательно? Коля не может начать выполнять одно задание, отложить его, сделать другое, а затем вернуться к первому.

Решение. Выберем сначала, какими по номеру делать 2 ДЗ, по которым сегодня вечером крайний срок выполнения. Это можно сделать $8 \cdot 7$ способами.

Теперь осталось 6 свободных мест, и на них 10 претендентов. Ясно, что свободные места можно заполнить $10 \cdot \dots \cdot 5$ способами.

Другой способ решения. Сначала выберем, какие необязательные З сегодня делать. Это можно сделать C_{10}^6 способами. Теперь осталось расположить 8 ДЗ (2 обязательных и 6 необязательных) в каком-то порядке.

Ответ: $8 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = C_{10}^6 \cdot 8!$.