Департамент политической науки, 2025-26 уч. год
Высшая математика
Лекция 10. Неопределённый интеграл. Замена переменной. (13.11.2024)
Д.А. Филимонов

КРАТКИЙ КОНСПЕКТ

Интегралы

Определение: если $F'(x) = f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$$F(x) \approx \sum f(x_i) \cdot \Delta x \to \int f(x)dx$$

Свойства:

$$\int f'(x)dx = f(x) + C$$

$$\int c \cdot f(x)dx = c \int f(x)\ dx$$

$$\int (f(x) \pm g(x))\ dx = \int f(x)\ dx \pm \int g(x)\ dx$$

Таблица:

$$\int 0\ dx = C$$

$$\int x^a\ dx = \frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1} + C,\ a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\ dx = \ln|x| + C$$

$$\int a^x\ dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + C$$

$$\int \sin x\ dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\ dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

Пример:

$$\int \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^5}} + 3^x \right) dx = \int \frac{2}{\sqrt[3]{x^5}} dx + \int 3^x dx = 2 \int x^{-\frac{5}{3}} dx + \frac{1}{\ln 3} \cdot 3^x = 2 \cdot \frac{1}{-\frac{5}{3}+1} \cdot x^{-\frac{5}{3}+1} + \frac{3^x}{\ln 3} =$$
$$= -3 \cdot x^{-\frac{2}{3}} + \frac{3^x}{\ln 3} = -\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{3^x}{\ln 3}$$

Замена переменной

$$\int f(\underbrace{g(y)}_{x}) \cdot \underbrace{g'(y)dy}_{dx} = \left| \begin{array}{l} x = g(y) \\ dx = d(g(y)) \\ dx = g'(y)dy \end{array} \right| = \int f(x)dx$$

Типы замен

1. Линейная, для $y = ax + b$, работает всегда

$$\int \cos(2x+3)dx = \left| \begin{array}{l} y = 2x+3 \\ dy = d(2x+3) \\ dy = 2dx \\ \frac{dy}{2} = dx \end{array} \right| = \int \cos \cdot \frac{dy}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sin y + C = \frac{\sin(2x+3)}{2} + C$$

2.Тригонометрическая

Интеграл вида $\int \sin^m x \cos^k x \ dx$, $m, k \in \mathbb{Z}$

Если

m - нечетное $\Rightarrow y = \cos x$

k - нечетное $\Rightarrow y = \sin x$

m, k - четные $\Rightarrow$ используем формулы понижения степени: $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$$\int \sin^2 x \cos x \ dx = \left| \begin{array}{l} y = \sin x \\ dy = d(\sin x) \\ dy = \cos x \ dx \end{array} \right| = \int y^2 \ dy = \frac{y^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

3.Степенная

Интеграл вида $\displaystyle\int f(x^n) \cdot x^{n-1} \ dx$, замена $y = x^n$

$$\int \cos(2x^3+1)\cdot x^2\ dx = \left| \begin{array}{l} y = x^3 \\ dy = d(x^3) \\ dy = 3x^2\ dx \\ \frac{dy}{3} = x^2\ dx \end{array} \right| = \int \cos(2y+1)\cdot \frac{dy}{3} = \left| \begin{array}{l} z = 2y+1 \\ dz = d(2y+1) \\ dz = 2dy \\ \frac{dz}{2} = dy \end{array} \right| =$$
$$= \int \cos z \cdot \frac{1}{3}\cdot\frac{dz}{2} = \frac{1}{6}\int \cos z\ dz = \frac{1}{6}\sin z + C = \frac{1}{6}\sin(2x^3+1)+C$$

Иногда можно проще:

$$\int \cos(2x^3+1)\cdot x^2\ dx = \left| \begin{array}{l} z = 2x^3+1 \\ dz = d(2x^3+1) \\ dz = 2\cdot 3x^2 dx \\ \frac{dz}{6} = x^2 dx \end{array} \right| = \int \cos z\cdot\frac{dz}{6} = \frac{1}{6}\sin z + C = \frac{1}{6}\sin(2x^3+1)+C$$

4.Логарифмическая
Интеграл вида $\int f(\ln x)\cdot \frac{1}{x}\ dx$, замена $y=\ln x$

$$\int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}dx = \left| \begin{array}{l} y = \ln x \\ dy = \frac{1}{x}dx \end{array} \right| = \int \frac{dy}{1+y^2} = \operatorname{arctg} y + C = \operatorname{arctg}(1+\ln x)+C$$

Интегрирование по частям

Формула производной произведения: $(uv)' = u'v + uv' \quad \Rightarrow \quad uv' = (uv)' - u'v$

Проинтегрируем и вспомним, что $\int f'(x)\ dx = f(x)+C$:

$$\int u(x)v'(x)\ dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)v(x)\ dx$$

Константу не пишем, потому что в обеих частях равенства есть знак интеграла. Более короткая запись:

$$\int uv'\ dx = uv - \int u'v\ dx$$

Это *формула интегрирования по частям.*

Иногда в литературе можно встретить другую формулу. Вспомним, что $d(f(x)) = f'(x)\,dx$. Значит $v'\ dx = dv$, а $u'\ dx = du$: $\int u\ dv = uv - \int v\ du$. Однако, эта форма неудобна при решении задач.

Составим таблицу функций u и v так, что функции $u(x)$ при дифференцировании упрощаются, а функции $v(x)$ не ухудшаются:

$u(x)$ *удобно дифференцировать*	$v(x)$ *удобно интегрировать*
x^n	e^x
$\ln x$	$\sin x$
$\arcsin x$	$\cos x$
$\operatorname{arctg} x$	x^n
$\sin x$	
$\cos x$	
e^x	

Примеры

$$\int x\sin x\ dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ v' = \sin x \\ u' = 1 \\ v = (-\cos x) \end{array} \right| = x\cdot(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)\ dx = -x\cos x + \int \cos x\ dx =$$

$$= -x\cos x + \sin x + C$$

$$\int \ln x\ dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} \\ v = x \end{array} \right| = x\cdot\ln x - \int \frac{1}{x} x\ dx = x\cdot\ln x - \int 1\ dx = x\cdot\ln x - x + C$$

$$\int e^x\cos x\ dx = \left| \begin{array}{l} u = \cos x \\ v' = e^x \\ u' = -\sin x \\ v = e^x \end{array} \right| = \cos x\cdot e^x - \int(-\sin x)\cdot e^x\ dx = \left[\begin{array}{l} u = -\sin x \\ v' = e^x \\ u' = \cos x \\ v = e^x \end{array} \right] =$$

$$= \cos x\cdot e^x + (-\sin x\cdot e^x - \underbrace{\int(\cos x)\cdot e^x\ dx}_{\text{изначальный интеграл}})$$

$$\Rightarrow 2\cdot\int(\cos x)\cdot e^x\ dx = \cos x\cdot e^x - \sin x\cdot e^x \quad\Rightarrow\quad \int(\cos x)\cdot e^x\ dx = \frac{\cos x\cdot e^x - \sin x\cdot e^x}{2}$$