

Школа лингвистики, 2025-26 уч. год

Линейная алгебра и математический анализ

Интегрирование по частям. Определённый и несобственный интеграл (06/07.11.2025)

Д. А. Филимонов

Некоторые задачи основаны на книге James Stewart, *Calculus Early Transcendentals*, 6e.

Задача 1. Найдите интеграл методом интегрирования по частям.

- | | | |
|----------------------------|--|---|
| (a) $\int x \cos x \, dx;$ | (d) $\int (x^2 + x - 2) \sin(2x) \, dx;$ | (g) $\int \operatorname{arctg} x \, dx;$ |
| (b) $\int x e^x \, dx;$ | (e) $\int \arcsin x \, dx;$ | (h) $\int \operatorname{arcctg} x \, dx;$ |
| (c) $\int x^2 e^x \, dx;$ | (f) $\int \arccos x \, dx;$ | (i) $\int e^x \sin x \, dx.$ |

Задача 2. Найдите следующие интегралы.

- (a) $\int_1^2 \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{2x^{-1}} \right) dx;$
- (b) $\int_0^1 (\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}) dx;$
- (c) $\int_0^1 (\sin x - x^2) dx;$
- (d) $\int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx;$
- (e) $\int_0^1 x e^{2x} dx.$

Задача 3. Вычислите площадь криволинейного треугольника под параболой, ограниченного графиками функций $y = x^2; y = 0; x = 1$

Задача 4. Вычислите следующие несобственные интегралы:

- (a) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2};$
- (b) $\int_1^{+\infty} 3e^{-3x} dx;$
- (c) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}};$
- (d) $\int_0^{+\infty} 3xe^{-3x} dx;$

$$(e) \int_0^{+\infty} 3x^2 e^{-3x} dx;$$

$$(f) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Дополнительные задачи

Задача 5. Вычислить интегралы $\int_0^1 f'(x)dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} x f'(x)dx$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f'(x)dx$, где

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ \frac{(x+1)^3}{27}, & -1 < x \leq 2; \\ 1, & 2 < x. \end{cases}$$

Задача 6 (*****). Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$