

Школа лингвистики, 2025-26 уч. год
Линейная алгебра и математический анализ
Неопределенный интеграл (21/23.10.2025)

Д. А. Филимонов

Некоторые задачи основаны на книге James Stewart, *Calculus Early Transcendentals*, 6e.

Задача 1. Найти все первообразные функции:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} f(x) = x - 3; & \text{(c)} f(x) = x(2 - x)^2; & \text{(e)} f(x) = \frac{1 + x^2}{x}. \\ \text{(b)} f(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 6; & \text{(d)} f(x) = 3e^x + x^2; & \end{array}$$

Задача 2. Проверьте равенства

$$\text{(a)} \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \sqrt{x^2 + 1} + C; \quad \text{(b)} \int \cos^3 x dx = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C.$$

Задача 3. Найдите следующие интегралы.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{2x^{-1}} \right) dx; & \text{(e)} \int \frac{x^3 - 2\sqrt{x}}{x} dx; & \text{(i)} \int (1^x + 2^x - 3^x) dx; \\ \text{(b)} \int (x^2 + x^{-2}) dx; & \text{(f)} \int (\sin x + \frac{1}{2}x) dx; & \text{(j)} \int (2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1}) dx; \\ \text{(c)} \int (\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}) dx; & \text{(g)} \int \frac{\sin 2x}{\sin x} dx; & \text{(k)} \int \frac{2^x + 3^x}{5^x} dx; \\ \text{(d)} \int (1 - t)(2 + t^2) dt; & \text{(h)} \int e^{2x} dx; & \text{(l)} \int (3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^x)^2 dx. \end{array}$$

Задача 4. Найдите следующие интегралы.

$$\text{(a)} \int \operatorname{tg}^2 x dx; \quad \text{(b)} \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx.$$

Задача 5. Вычислите интеграл, сделав указанную замену переменной.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \int e^{-x} dx, \quad y = -x; & \text{(c)} \int x^3(2 + x^4)^5 dx, \quad y = 2 + x^4; \\ \text{(b)} \int \frac{dt}{(1 - 6t)^4}, \quad y = 1 - 6t; & \text{(d)} \int x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx, \quad y = x^3 + 1; \end{array}$$

Задача 6. Делая замену переменной, вычислите интеграл.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int (3x - 2)^{20} dx; & \text{(e)} \int e^x \sqrt{1 + e^x} dx; & \text{(h)} \int \cos^3 x \sin^2 x dx; \\ \text{(b)} \int \frac{dx}{5 - 3x}; & \text{(f)} \int \frac{\ln^2 x}{x} dx; & \text{(i)} \int \sin^2 x dx; \\ \text{(c)} \int x \sin x^2 dx; & & \\ \text{(d)} \int x^2 e^{-x^3} dx; & \text{(g)} \int \sin^3 x dx; & \text{(j)} \int \operatorname{ctg} x dx. \end{array}$$

1 Дополнительные задачи

Задача 7. Вычислить интегралы

(a) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x - 3}$

(b) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$

(c) $\int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx$

(d) $\int \frac{dx}{x^3 - 1}$