

Школа лингвистики, 2025-26 уч. год
Линейная алгебра и математический анализ
Производная функции (07/09.10.2025)

Д. А. Филимонов

Некоторые задачи основаны на книге James Stewart, Calculus Early Transcendentals, 6e

Задача 1. Найти производные следующих функций (без использования формулы производной сложной функции):

(a) $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x}$;

(f) $f(x) = e^{-x}$;

(b) $f(x) = \log_2 x + \arcsin x - 2\operatorname{arctg} x$;

(g) $f(t) = \frac{2t}{4+t^2}$;

(c) $f(x) = (x-1)^2$;

(h) $f(x) = \operatorname{tg}(x) + \operatorname{ctg}(x)$;

(d) $f(x) = (x^3 + 2x)e^x$;

(i) $f(x) = \sin(2x)$;

(e) $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$;

(j) $f(x) = \sin(x + \alpha)$;

Задача 2. Представьте функцию в виде $y = f(g(x))$ (т.е. укажите функции $z = g(x)$ и $y = f(z)$), затем найдите производную с помощью правила дифференцирования сложной функции.

(a) $y = (2x + 1)^{2023}$;

(d) $y = \sqrt{x \sin x}$;

(g) $y = e^{\sqrt{x}}$;

(b) $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2023}$;

(e) $y = (x^4 + 3x^2 - 2)^5$;

(h) $y = \arcsin(\sin x)$;

(c) $y = \sqrt{4 + 3x}$;

(f) $y = 10^{x^2}$;

(i) $y = \ln x^2$.

Задача 3. Вычислите и упростите производные следующих функций.

(a) $y = x \ln x - x$;

(d) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$;

(b) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$;

(e) $y = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$;

(c) $y = -\ln \cos x$;

(f) $y = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a}$.

Задача 4. Вычислите следующие частные производные.

(a) $\left(\frac{x}{y}\right)'_x$;

(d) $((a+b-1)^2 + (2a+b-2)^2)'_a$;

(b) $\left(\frac{x}{y}\right)'_y$;

(e) $((a+b-1)^2 + (2a+b-2)^2)'_b$;

(c) $\left(\frac{x}{y}\right)'_z$;

(f) $(xyze^{xyz})'_z$.

Задача 5. Согласно закону Пиотровского-Альтмана, в немецком языке замещение окончания формы глагола второго лица единственного числа $\{-t\}$ на $\{-st\}$ подчиняется следующему закону:

$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}},$$

где $p(t)$ — доля глаголов имеющих во втором лице окончание $\{-st\}$ в момент времени t , константы a и k положительны.

- (a) Найти $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t)$. Пояснить, что означает полученный ответ.
- (b) Найти скорость распространения нового окончания.

Задача 6. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \frac{2}{1 + e^{-x}}$ в точке $(0; 1)$.

1 Дополнительные задачи

Задача 7. Найти производные следующих функций:

- (a) $f(x) = x^x$;
- (b) $f(x) = (2x + 1)^{3x-2}$;
- (c) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$;
- (d) $f(x) = x^{x^x}$;