

Школа лингвистики, 2025-26 уч. год

Линейная алгебра и математический анализ

Обратная функция. Экспонента. Логарифм (09/11.09.2025)

Д. А. Филимонов

Некоторые задачи основаны на книге James Stewart, *Calculus Early Transcendentals*, 6e.

Задача 1. Попробуйте найти обратную зависимость для функции $y = c$, где c — некоторая фиксированная константа.

Задача 2. Найдите область определения и область значения функций:

(a) $y = x^2 - 1$;

(b) $y = |x|$;

(c) $y = |x - 1|$;

(d) $y = |x| - 1$;

(e) $y = \frac{1}{x^2}$;

(f) $y = x^4 + x^2 + 1$;

(g) (*) $y = \sqrt{4 - x^2}$.

Постройте графики и покажите, что для этих функций нет обратных на всей области определения.

Задача 3. В предыдущих задачах, выделите области, в которых у функции будет обратная и постройте графики обратных функций на каждой из областей. Чему равна область определения и область значений обратной функции? Как они соотносятся с областью определения и областью значений самой функции?

Задача 4. Найдите обратные к следующим функциям:

(a) $y = x$;

(b) $y = 2x + 5$;

(c) $y = x^2, x \leq 0$;

(d) $y = \frac{1}{x}$;

(e) $y = 2^{3x} - 1$;

(f) $y = (3x + 1)^3$.

Задача 5. Выделить лучи на оси Ox , на которых у функции $f(x)$ есть обратная. Для каждого из найденных лучей, найти обратную функцию. Построить соответствующие графики.

(a) $f(x) = -x^2$;

(b) $f(x) = x^2 - 5x + 8$.

Задача 6. Построить графики функций.

(a) $y = 2^x$ и $y = \log_2 x$.

(b) $y = 4^x$ и $y = \log_4 x$.

(c) $y = (1/2)^x$ и $y = \log_{1/2} x$.

Задача 7. Пользуясь результатами предыдущей задачи, объясните, почему $\log_{1/a} x = -\log_a x$.

Задача 8. Количество постов в твиттере с популярным мемом удваивается каждые полчаса. Предположим, что начальное количество оригинальных записей с мемом равно 100. Если известно, что количество постов с мемом равно

- (a) 200,
- (b) 400,
- (c) 3200,
- (d) произвольному числу M ,

чему равно время, прошедшее от начала публикации оригинальных записей?

Задача 9. Абунг и Абынга решили изобрести письменность для своего языка. Но смогли придумать только три значка. Решили, что просто будут составлять слова из разных последовательностей. Главное, чтобы все слова были одной длины (а иначе сложно). Слов у них не много, всего 240. Какое минимальное число букв должно быть в словах, чтобы хватило на весь их словарь? А если они вдруг позаимствуют у соседей ещё десяток слов?

Дополнительные задачи

Задача 10. Найдите обратную функцию к следующим функциям, выделив все возможные промежутки, где обратная функция существует:

- (a) $\sin(x)$
- (b) $\cos(x)$
- (c) $\operatorname{tg}(x)$
- (d) $\operatorname{ctg}(x)$

Задача 11. Пользуясь определением логарифма как обратной функции к показательной и свойствами показательной функции (свойствами операции возведения в степень), докажите, что следующие равенства выполняются при всех a, b, x, y , при которых левая и правая части имеют смысл:

- (a) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$;
- (b) $\log_a x^y = y \log_a x$;
- (c) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$;

Задача 12. Постройте графики следующих функций:

- (a) $y = \sin(\arcsin(x))$,
- (b) $y = \arcsin(\sin(x))$,
- (c) $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x))$,
- (d) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(x))$.

Задача 13. Всегда ли $f(f^{-1}(x)) = x$? А $f^{-1}(f(x)) = x$? Если нет, укажите, какие возможны варианты.